

معادلات دیفرانسیل

معادلات دیفرانسیل

مؤلفان:

دکتر هومن فتحعلیانی

دکتر مهدی یوسفوند

سرشناسه	:	
عنوان و نام پدیدآور	:	
مشخصات نشر	:	
مشخصات ظاهری	:	
شابک	:	
وضعیت فهرست‌نویسی	:	
یادداشت	:	
موضوع	:	
موضوع	:	
رده بندی کنگره	:	
رده بندی دیویی	:	
شماره کتابشناسی ملی	:	

شابک :

عنوان کتاب : معادلات دیفرانسیل

مؤلفان : دکتر هومن فتحعلیانی و دکتر مهدی یوسف‌وند

ناشر : انتشارات آوازه دانش ملایر

حروفچین و طراح جلد : زاهره احمدی کندلان

نوبت چاپ : اول - ۱۳۹۸

شمارگان : ۵۰۰ نسخه

چاپ و صحافی : گاندی

قیمت : ۳۰۰۰۰ تومان



مسئولیت شرعی و قانونی مطالب این کتاب به عهده مؤلفان می‌باشد.

کلیه حقوق مادی و معنوی متعلق به مؤلفان می‌باشد و در صورت نسخه‌برداری از این اثر، براساس ماده ۲۳ و ۲۴ قانون شورای حقوق مؤلفان برخورد خواهد شد.

آدرس انتشارات: ملایر، خیابان شهید رستگار مؤمنی، مجتمع تجاری شهرداری، طبقه زیرزمین.

۰۹۱۸۵۴۱۸۳۳۴ - - (۰۸۱) - ۳۲۲۲۱۶۷۴

باتقدیم به استاد عزیز

آقای دکتر مهدی کشاورزیان

فهرست مطالب

پیشگفتار

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

فصل چهارم

تمرین‌های تکمیلی

فصل اول

تعاریف اولیه و معادلات مرتبه اول

● تعریف معادله دیفرانسیل

خیلی از پدیده‌های فیزیکی و فنی با علائم ریاضی بیان می‌شوند و به صورت یک معادله دیفرانسیل تعریف می‌شوند.

معادلات دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. معادلات دیفرانسیل معمولی ۲. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

۱. معادله دیفرانسیل معمولی: اگر $y = f(x)$ که در بازه $I = [a, b]$ معادله دیفرانسیل معمولی است. اگر شامل:

۱. متغیر مستقل x

۲. متغیر مجهول (وابسته) $y = f(x)$

۳. مشتقات f

۲. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی: تابع در این نوع معادلات چند متغیره می‌باشد و مشتقات آن نسبت به متغیرهای مستقل به صورت جزئی (نسبی) بیان می‌شود.

● مرتبه معادله

بالاترین مشتق موجود در معادله.

مثال ۱: $(y''')^r + (y'')^r + y' = xy$

معادله معمولی - مرتبه سوم - مجهول: y = مشتقات y', y'', y''' - متغیر مستقل x

مثال ۲: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

معادله با مشتقات جزئی - مرتبه دوم - متغیر وابسته u - متغیرهای مستقل x, y, z

یادآوری $y = f(x) \rightarrow y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$

نمونه‌هایی از معادلات دیفرانسیل معمولی

۱) $\frac{dy}{dx} = \cos x$ ۲) $(x^r + y^r)dx - rxydy = 0$

۳) $y' = y''$ ۴) $x^r \frac{d^r y}{dx^r} - r x \frac{dy}{dx} + r y = \cos x$

● **تعریف معادله دیفرانسیل مرتبه n ام**

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

یا $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

ما بعضی از معادلات دیفرانسیل را با استفاده از تکنیک‌های مقدماتی بازنویسی می‌کنیم.

مثال: معادلات زیر را به صورت دیگر بنویسید.

الف) $F(x, y, y') = (y')^r - [\sin xy - rxy]^r = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} y' = \sin xy - rxy \\ y' = -[\sin xy - rxy] \end{cases}$$

ب) $F(x, y, y') = xy'^2 + r y' - r x^r = 0 \Rightarrow a = x, b = r, c = -r x^r$

$$y' = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4x^r}}{2x} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4x^r}}{2x} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4x^r}}{x}$$

معادلات دیفرانسیل معمولی به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می‌شود. معادله

دیفرانسیل مرتبه n ام خطی می‌گوییم اگر ضرایب $y, y', \dots, y^{(n)}$ تابعی از x باشد.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

یعنی هر $a_i(x)$ تابعی از x باشد آن معادله دیفرانسیل مرتبه n ام خطی است.

تذکر

اگر $a_i(x)$ ها اعدادی ثابت باشند به آن معادله دیفرانسیل مرتبه n ام با ضرایب ثابت می‌گوییم.

نکته

معادله دیفرانسیلی خطی است اگر y و مشتقات آن:
۱- متغیر تابعی نباشند و ۲- در خود ضرب نشوند

قسمت (الف) معادلات خطی هستند:

$$(الف) \begin{cases} y' + y = e^x \\ y'' + xy' + x^2 y = x \\ y''' - (\sin x)y = \tan x \end{cases}$$

● معادله دیفرانسیل غیرخطی

معادله دیفرانسیلی غیرخطی است، اگر معادله دیفرانسیل مرتبه n ام خطی نباشد، معادلات قسمت (ب) غیرخطی هستند.

$$(ب) \begin{cases} e^{\sin y} - \cos y' = \log x \\ (y'')^5 + y'' + (2x^2 \cos x)y' - y = 0 \\ yy' + \sin x = 0 \end{cases}$$

نکته

اگر در معادله دیفرانسیلی توان یک متغیر وابسته مشتقات آن بیشتر از یک بود حتماً غیرخطی است.
به عنوان مثال $x^2 y' + xy = y'$, $(y'')^2 + y = 0$ غیرخطی هستند.

ما در این کتاب بیشتر با معادلات دیفرانسیل خطی کار می‌کنیم و در این کتاب کاری به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی نداریم و فقط به معادلات معمولی می‌پردازیم.

● درجه

توان مشتق با بالاترین مرتبه را می‌گویند (اول بالاترین مرتبه)

(حل معادلات دیفرانسیل برحسب مرتبه است و خیلی با درجه کاری نداریم)

نکته

هر معادله خطی از درجه یک است (همه مشتقات توانشان یک است).

مثال:

خطی - مرتبه ۳ - درجه ۱ $y''' - (\sin x)y = \tan x \rightarrow$ الف

غیر خطی - مرتبه ۳ - درجه ۴ $\rightarrow y + 2 = y' - e^x y'' + (\tan x)y''' - xy''^4$ ب

● جواب معادله دیفرانسیل

تابع $y = g(x)$ را جواب یک معادله دیفرانسیل از مرتبه n می‌نامیم هرگاه:

۱. دارای مشتق مرتبه n ام باشد. ۲. در معادله دیفرانسیل نیز صدق کند.

مثال: جواب معادله $0 = y - 3x^2 - 8 + (y')^2 + (y'')^2 \rightarrow y = x^2$ می‌باشد.

مثال: آیا $0 = x^2 + y^2 - 25 = f(x, y)$ یک جواب ضمنی از معادله دیفرانسیل زیر است؟

$$F(x, y, y') = yy' + x = 0$$

حل: مرتب می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 25 = 0 \rightarrow y = \pm \sqrt{25 - x^2}$$

یکی از دو حالت را انتخاب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} y = \sqrt{25 - x^2} \rightarrow y' = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} \cdot \sqrt{25 - x^2} + x = 0$$

پس یک جواب ضمنی می‌باشد چون در معادله صدق کرد.

جواب‌های یک معادله دیفرانسیل معمولی به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱. جواب عمومی ۲. جواب خصوصی ۳. جواب غیرعادی

☞ (در این درس عمده بحث ما جواب عمومی و خصوصی است) ☞

۱. جواب عمومی: جوابی از معادله که به تعداد مرتبه معادله، در آن پارامتر (ثابت اختیاری)

وجود داشته باشد.

جواب عمومی معادله مرتبه n ام (یک خانواده n پارامتری) به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\varphi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

۲. جواب خصوصی: با مقداردهی به پارامترها در جواب عمومی بدست می‌آید.

۳. جواب غیرعادی: جوابی از معادله که از جواب عمومی بدست نمی‌آید (گاهی با حدس و بعضی اوقات با شرایط مسئله که بدون الگوریتم حل مسئله بدست می‌آید، جواب غیرعادی می‌گوییم)

نکته

۱. اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه n باشد، آنگاه جواب معادله شامل n ثابت اختیاری است.

۲. از جواب عمومی، بی نهایت جواب خصوصی بدست می‌آید.

۳. معادله دیفرانسیل خطی جواب غیر عادی ندارد.

مثال ۱: برای معادله دیفرانسیل $y' - 2y = 0$ جواب عمومی $y = ce^{2x}$ (خانواده ۱ پارامتری) می‌باشد و مثلاً به ازای $c = -1$ جواب خصوصی $y = -e^{2x}$ می‌باشد.

مثال ۲: برای معادله دیفرانسیل غیر خطی $y' = 2\sqrt{y}$ جواب عمومی $y = (x+c)^2$ جواب غیرعادی $y = 0$ (با مقداردهی به c از جواب عمومی بدست نمی‌آید)

مثال ۳: $y = e^x + c_1x + c_2$ (خانواده ۲ پارامتری) یک جواب عمومی برای معادله $y'' = e^x$ است.

● منحنی پوش

دسته منحنی: معادله ضمنی $F(x, y) = c$ (ثابت اختیاری) پوش دسته منحنی‌های $\varphi(x, y, c) = 0$ ، منحنی است که بر تمام منحنی‌ها (و بر هر کدام فقط در یک نقطه) مماس می‌شود.

● روش بدست آوردن پوش (یک دسته منحنی)

دسته منحنی‌های $\varphi(x, y, c) = 0$

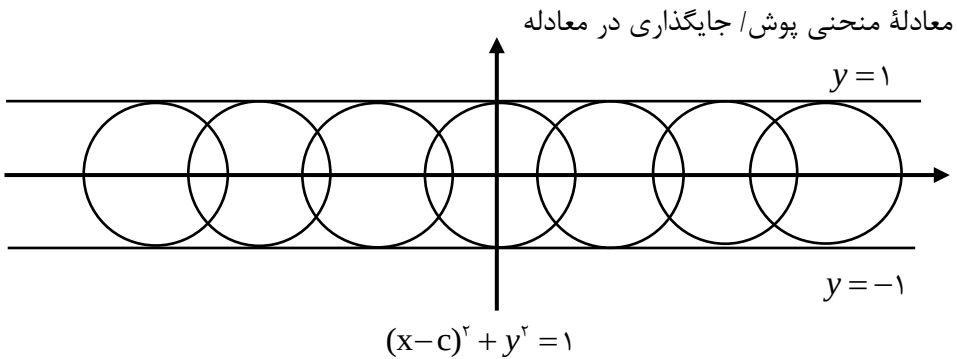
نکته

اگر حذف c ممکن نباشد، می‌توان مختصات پوش را نسبت به c بیان نمود.

مثال: پوش دسته منحنی‌های $(x-c)^2 + y^2 = 1$.

یادآوری از ریاضی ۱: معادله یک دایره به صورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ که α, β مختصات مرکز و r شعاع دایره هستند

$$\begin{cases} (1) (x-c)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow -2(x-c) = 0 \Rightarrow x-c=0 \Rightarrow x=c \\ (2) (c-c)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \end{cases}$$



مثال: پوش دسته منحنی‌های $y = ce^x + \frac{1}{c}$

$$1) 0 = e^x - \frac{1}{c^2} \Rightarrow c = e^{\frac{x}{2}}$$

$$2) \Rightarrow y = e^{\frac{x}{2}} e^x + \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} = e^{\frac{3x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} = 2e^{\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow y = 2e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \text{معادله منحنی پوش}$$

● تشکیل معادله دیفرانسیل با استفاده از جواب عمومی

۱. به تعداد پارامترها، مشتق‌گیری متوالی از جواب عمومی نسبت به متغیر x

۲. تشکیل دستگاه شامل جواب عمومی و این مشتقات

۳. حذف پارامترها در این دستگاه

مثال: برای تشکیل معادله دیفرانسیل که جواب آن $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ است داریم:

$$\begin{cases} y = c_1 \sin x + c_2 \cos x \\ y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x \Rightarrow y'' = -y \Rightarrow y'' + y = 0 \\ y'' = -c_1 \sin x - c_2 \cos x \end{cases}$$

● معادله دیفرانسیل مرتبه اول

شکل کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت زیر است:

$$F(x, y, y') = 0$$

البته به صورت‌های دیگری که در زیر نمایش داده شده هم ارائه می‌شود:

$$y' = f(x, y) \quad \text{یا} \quad x = f(y, y') \quad \text{یا} \quad y = f(x, y')$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول عبارتند از:

۱. معادلات تفکیک‌پذیر (جداشدنی)
۲. معادلات همگن
۳. معادلات کامل
۴. معادلات غیرکامل با عامل انتگرال‌ساز
۵. معادلات خطی مرتبه اول
۶. معادله برنولی
۷. معادله ریکاتی
۸. معادله کلرو

۱. معادله دیفرانسیل مرتبه اول جداشدنی: معادله دیفرانسیل مرتبه اول را جداشدنی گویند به شرط آنکه:

(۱) معادله دیفرانسیل مرتبه اول را بتوان به صورت $f(x)dx + g(y)dy = 0$ نوشت.

(۲) $g(y)$ تابعی تنها از y باشد.

(۳) $f(x)$ تابعی تنها از x باشد.

حل معادله جداشدنی: (۱) ابتدا متغیرهای x و y را جدا کرده، (۲) سپس از طرفین انتگرال‌گیری می‌کنیم. به عبارت دیگر، جواب عمومی معادله جداشدنی عبارتند از:

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$$

🔍 **تست:** کدام معادله، جداشدنی نیست؟

$$۱) \quad y' = \frac{(1+y^2)}{(1+x^2)}$$

$$۲) \quad y' = e^x (1-y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$۳) \quad 2xy^2 y' = 4y^2 - x^2$$

$$۴) \quad (\cos^2 x) y' = y^2 (y-1) \sin x$$

تک تک گزینه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$۱ \text{ بررسی گزینه } ۱: \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + c$$

$$\text{پس جداشدنی است} \quad \tan^{-1} x + c \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c \quad \text{یادآوری: } (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

پس جدا شدنی است $\Rightarrow \sin^{-1} y = e^x + c$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = e^x dx$: بررسی گزینه ۲

یادآوری: $(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

پس جداشدنی است $\Rightarrow \frac{dy}{y^2(y-1)} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$: بررسی گزینه ۴

(به عنوان تمرین، انتگرال‌های بالا را محاسبه کنید)

پس تنها گزینه‌ای که جداناپذیر است گزینه ۳ است.

مثال: مسأله با مقدار اولیه زیر را حل کنید. (چون مقدار اولیه دارد پس جواب خصوصی هم دارد)

$$2x(y+1)dx - ydy = 0, \quad y(0) = -2$$

حل: ابتدا X, Y را از هم جدا می‌کنیم.

$$\int \frac{y}{y+1} dy = 2 \int x dx \xrightarrow{\text{انتگرال‌گیری از طرفین}} \Rightarrow \frac{y}{y+1} dy = 2x dx$$

$$\xrightarrow{\text{به انتگرال اول در صورت یک +۱ و -۱ اضافه می‌کنیم}} \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = 2 \int x dx$$

$$\Rightarrow y - \ln|y+1| = x^2 + c$$

$$y(0) = -2$$

$$\Rightarrow x^2 = y - \ln|y+1| + c \xrightarrow{0 = -2 - \ln(-2+1) + c} c = 2$$

$$\Rightarrow x^2 = y - \ln|y+1| + 2$$

توجه داشته باشید $y = -1$ جواب غیر مادی معادله است.

● معادلات قابل تبدیل به جداشدنی

۱. معادله خطی ۲. معادله همگن

مراحل تبدیل یک معادله خطی به یک معادله جداشدنی عبارتند از:

$$(1) \text{ تغییر متغیر: } u = ax + by + c \Rightarrow y' = f(u)$$

$$(2) \text{ مشتق‌گیری: } u' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{u' - a}{b}$$

$$(3) \text{ جایگذاری: } f(u) = \frac{u' - a}{b} \Rightarrow bf(u) = u' - a \Rightarrow bf(u) = \frac{du}{dx} - a$$

$$(4) \text{ تفکیک متغیرها: } \frac{du}{bf(u) + a} = dx$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y' \ln(x-y) = 1 + \ln(x-y)$ را حل کنید.

ابتدا تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم:

$$u = x - y \Rightarrow u' = 1 - y' \Rightarrow y' = 1 - u'$$

$$(1 - u') \ln u = 1 + \ln u \Rightarrow u' = -\frac{1}{\ln u} \Rightarrow \ln u du = -dx$$

$$-x + c = \int \ln u du = u \ln u - u \Rightarrow (x - y) \ln(x - y) - x + y = -x + c$$

$$\Rightarrow (x - y) \ln(x - y) + y = c$$

● معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن

نوع دوم معادلات دیفرانسیل که قابل تبدیل به معادلات جدانشدنی هستند، معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن هستند.

● تعریف تابع همگن

تابع $f(x, y)$ همگن از درجه n ام اگر:

$$t > 0 \quad f(tx, ty) = t^n f(x, y) \xrightarrow{\text{ثابت}} (n \in \mathbb{R})$$

مثال: درجه هر یک از توابع زیر را در صورت همگن بودن تعیین کنید.

الف) $f(x, y) = x^2 + y^2 + y^2 \ln \frac{x}{y}$

حل:

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 + (ty)^2 \ln \frac{tx}{ty} = t^2 x^2 + t^2 y^2 + t^2 y^2 \ln \frac{x}{y}$$

$$= t^2 \left(x^2 + y^2 + y^2 \ln \frac{x}{y} \right) = t^2 f(x, y)$$

پس $f(x, y)$ یک تابع همگن از درجه دو است.

ب) $f(x, y) = \sqrt{y} \sin \frac{x}{y}$

$$f(tx, ty) = t^{\frac{1}{2}} \sqrt{y} \sin \frac{x}{y} = t^{\frac{1}{2}} f(x, y)$$

حل:

پس $f(x, y)$ یک تابع همگن از درجه $\frac{1}{2}$ است.

● تعریف معادله دیفرانسیل همگن

شرط همگن بودن معادله دیفرانسیل: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

(۱) توابع $M(x, y)$ و $N(x, y)$ همگن باشند.

(۲) درجه همگن توابع $M(x, y)$ و $N(x, y)$ یکسان باشد.

(اگر دو شرط بالا برقرار باشد به آن معادله دیفرانسیل همگن می‌گوییم)

نکته

۱. اگر تابع $f(x, y)$ همگن از درجه صفر باشد، معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$ نیز همگن

است. ۲. هر معادله به شکل $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$ همگن است.

● روش تبدیل معادله همگن به معادله جدادنی

با استفاده از تغییر متغیر $u = \frac{y}{x}$ یا $y = ux$ و سپس مشتق‌گیری از این تغییر متغیر و

در نهایت جایگذاری در معادله دیفرانسیل، معادله به معادله تفکیک‌پذیر (جدادنی) تبدیل خواهد شد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱: معادله $y' = \frac{2x^2 + y^2}{xy^2}$ را حل کنید.

$$y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = \frac{2x^2 + (ux)^2}{x(xu)^2}$$

$$\Rightarrow u'x + u = \frac{2x^2 + u^2x^2}{x^2u^2} = \frac{x^2(2 + u^2)}{x^2u^2}$$

$$\Rightarrow u'x + u = \frac{2}{u^2} + \frac{u^2}{u^2} \Rightarrow u'x + u = \frac{2}{u^2} + u$$

$$\Rightarrow u'x = \frac{2}{u^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2}{u^2} \left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow u^2 du = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int u^2 du = 2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{u^3}{3} = 2 \ln x + \text{Lnc} \Rightarrow \frac{u^3}{3} = \text{Lnc}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3} = \text{Lnc}x^2 \Rightarrow y^3 = 3x^3 \text{Lnc}x^2$$

مثال ۲: معادله $(x-y)dx + (x-4y)dy = 0$ را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x-y)}{x-4y} \xrightarrow{(1)} u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} \cdot x$$

با جایگذاری در (۱) $\rightarrow u + x \frac{du}{dx} = \frac{-(x-ux)}{(x-4ux)} = \frac{u-1}{1-4u}$

جدا کردن متغیرها $\rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{u-1}{1-4u} - u = \frac{u-1-u+4u^2}{1-4u}$

اگر مخرج مساوی صفر باشد $\rightarrow u = \pm \frac{1}{2} = \frac{4u^2-1}{1-4u} \Rightarrow \frac{1-4u}{4u^2-1} du = \frac{dx}{x}$

پس با فرض اینکه مخرج مخالف صفر باشد (یعنی $u \neq \pm \frac{1}{2}$ باشد)، از طرفین انتگرال می‌گیریم (با استفاده از تجزیه کسر و اتحاد مزدوج)

$$\frac{dx}{x} = \left[\frac{\frac{1}{2}}{1-2u} - \frac{\frac{3}{2}}{1+2u} \right] du$$

انتگرال‌گیری از طرفین $\rightarrow \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln|1-2u| - \frac{3}{4} \ln|1+2u| + c$

با ضرب طرفین در عدد ۴

$$\Rightarrow 4\ln|x| + \ln|1-2u| + 3\ln|1+2u| = 4c \Rightarrow \ln(|x|^4 \cdot |1-2u| \cdot |1+2u|^3) = 4c$$

$$|x|^4 \cdot |1-2u| \cdot |1+2u|^3 = e^{4c} > 0, \quad k = e^{4c} > 0$$

$$\xrightarrow{u=\frac{y}{x}} |x|^4 \cdot \left|1 - \frac{2y}{x}\right| \cdot \left|1 + 2\frac{y}{x}\right|^3 = k > 0$$

$$\Rightarrow |x| \cdot \left|1 - \frac{2y}{x}\right| \cdot |x|^3 \cdot \left|1 + \frac{2y}{x}\right|^3 = k$$

$$|x-2y| \cdot |x+2y|^3 = k > 0 \quad \text{جواب معادله اگر مخرج مخالف صفر باشد}$$

$$1-4u^2 = 0 \Rightarrow u = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y}{x} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}x$$

دو جواب معادله هستند اگر مخرج صفر باشد

● معادلات دیفرانسیل قابل تبدیل به همگن

در معادلات دیفرانسیلی بصورت $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ اگر $c=c'=0$ باشد، طبق مطالب قبل معادله همگن است، اما در غیر این صورت دستگاه $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ تشکیل می‌دهیم؛ سپس این دستگاه می‌تواند دو حالت جواب داشته باشد:

۱. اگر دارای جواب منحصر بفرد (x, y) باشد با استفاده از تغییر متغیر $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$ معادله را به معادله همگن تبدیل می‌کنیم.

۲. اگر دستگاه جواب نداشته باشد (یا منطبق یا موازی باشند) با تغییر متغیر $u = ax + by$ معادله را به معادله جداسدنی تبدیل می‌کنیم.

نکته

- (۱) شرط منحصر به فرد بودن جواب دستگاه: مخالف صفر بودن و ترمینان ضرایب (یعنی $ab' - a'b \neq 0$ یا $ab' \neq a'b$)
 (۲) شرط موازی یا منطبق بودن معادلات دستگاه $ab' - a'b = 0$ یا $ab' = a'b$ باشد.

مثال: معادله دیفرانسیل $y' = \frac{x+3y-5}{x-y-1}$ را حل کنید.

$$\begin{cases} x+3y-5=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (2, 1)$$

$$\begin{cases} X = x - x_0 = x - 2 \Rightarrow x = X + 2 \Rightarrow dx = dX \\ Y = y - y_0 = y - 1 \Rightarrow y = Y + 1 \Rightarrow dy = dY \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = \frac{(X+2)+3(Y+1)-5}{(X+2)-(Y+1)-1} = \frac{X+3Y}{X-Y}$$

با تغییر متغیر: $Y' = U'X + U \Leftarrow Y = UX$

$$U'X + U = \frac{X+3UX}{X-UX} = \frac{X(1+3U)}{X(1-U)} \Rightarrow U'X = \frac{1+3U}{1-U} - U \frac{dU}{dX} X = \frac{1+3U-U+U^2}{1-U}$$

$$\Rightarrow X(1-U)dU = (U^2 + 3U + 1)dX \Rightarrow \frac{(1-U)dU}{(U+1)^2} = \frac{dX}{X}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{(1-U)dU}{(U+1)^2} &= \frac{dX}{X} \Rightarrow -\int \frac{(CU+1-2)}{(U+1)^2} dU = \int \frac{dX}{X} \Rightarrow -\int \frac{1}{U+1} dU + 2 \int \frac{dU}{(U+1)^2} = \int \frac{dX}{X} \\ \Rightarrow -\ln(U+1) - \frac{2}{U+1} &= \ln X + \ln c \Rightarrow \frac{-2}{U+1} = \ln(cX(U+1)) \Rightarrow \frac{-2}{\left(\frac{Y}{X+1}+1\right)} = \\ \ln c X \left(\frac{Y}{X+1}+1\right) &\Rightarrow \frac{-2}{\left(\frac{y-1}{x-2}+1\right)} = \ln c (y-1+x-2) \end{aligned}$$

مثال بعد حالت دوم را انتخاب می‌کنیم، یعنی زمانی که دستگاه جواب نداشته باشد.

مثال: معادله دیفرانسیل $y' = \frac{x-3y+3}{2x-6y+1}$ را حل کنید.

$$ab' - ba' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3y+3=0 \\ 2x-6y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \text{دستگاه جواب ندارد}$$

$$\begin{aligned} \text{تغییر متغیر} \Rightarrow u = x-3y \Rightarrow u' = 1-3y' \Rightarrow y' &= \frac{1-u'}{3} \\ \frac{1-u'}{3} = \frac{u+3}{2u+1} \Rightarrow 1-u' &= \frac{3u+9}{2u+1} \Rightarrow u' = 1 - \frac{3u+9}{2u+1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{u+8}{2u+1} \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{u+8}{2u+1} \Rightarrow \frac{2u+1}{u+8} du &= -dx \Rightarrow \int \frac{2u+1}{u+8} du = \int -dx \end{aligned}$$

(یکی از تکنیک‌های انتگرال‌گیری ظاهر کردن مخرج در صورت است در این مثال در طرف اول اگر صورت $2u+16$ باشد می‌توان با مخرج ساده کرد پس 15 و -15 به صورت انتگرال اول اضافه می‌کنیم)

$$\begin{aligned} \int \left(2 - \frac{15}{u+8} \right) du &= \int -dx \Rightarrow 2u - 15 \ln(u+8) = -x + c \\ \Rightarrow 2(x-3y) - 15 \ln(x-3y+8) &= -x + c \end{aligned}$$

● معادلات دیفرانسیل کامل

دیفرانسیل کامل تابع $f(x, y)$ برابر است با:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

مثال: دیفرانسیل کامل $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2$ برابر است:

$$df = (3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy$$

معادله $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ کامل است اگر بتوان تابعی مانند $f(x, y)$ یافت به طوری که:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}$$

نکته

بعضی از معادلات کامل نیز معادلات جداشدنی هستند.

قضیه

معادله دیفرانسیل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ کامل است اگر و تنها اگر:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

قضیه

روش حل جهت یافتن جواب:

۱. تشخیص کامل بودن معادله دیفرانسیل $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \right)$

۲. بدست آوردن انتگرال‌های زیر:

الف) $f(x, y) = \int M(x, y)dx$

ب) $f(x, y) = \int N(x, y)dy$

۳. سپس $f(x, y)$ را مجموعه‌ای از جملات مشترک (یکبار) و غیرمشترک انتگرال الف و ب در نظر می‌گیریم. جواب معادله کامل به صورت $f(x, y) = C$ (که در آن C ثابت است)

مثال: جواب عمومی معادله $\frac{dy}{dx} = \frac{-e^y}{xe^y + 2y}$ را پیدا کنید.

حل: ابتدا معادله را به صورت ro به ro می‌آوریم:

$$e^y dx + (xe^y + 2y) dy = 0$$

$$\begin{cases} M(x, y) = e^y \Rightarrow \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(e^y)}{\partial y} = e^y \\ N(x, y) = xe^y + 2y \Rightarrow \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(xe^y + 2y)}{\partial x} = e^y \end{cases}$$

چون $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس معادله کامل است.

پس تابعی مانند F وجود دارد به شکلی که،

$$N(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = xe^y + 2y$$

$$M(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = e^y$$

$$F = \int (xe^y + 2y) dy = xe^y + y^2 + c_1 \quad \text{با انتگرال گیری از (۲)}$$

$$F = \int e^y dx = xe^y + c_2 \quad \text{با انتگرال گیری از (۱)}$$

$$F(x, y) = xe^y + y^2 + k \quad (k = c_1 + c_2)$$

جواب : $F(x, y) = xe^y + y^2 + k$

● عامل مشترک

(توجه داشته باشید برای انتگرال گیری از M نسبت به x و از N نسبت به y است، اما برای مشتق گیری از M نسبت به y و از N نسبت به x مشتق می گیریم)

مثال: معادله $y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$ را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}} \Rightarrow (2y - xe^{xy}) dy - (2 + ye^{xy}) dx = 0$$

$$M = -(2 + ye^{xy}) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -(e^{xy} + xye^{xy})$$

معادله کامل است.

$$N = 2y - xe^{xy} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -(e^{xy} + xye^{xy})$$

$$F(x, y) = \int N dy = \int (2y - xe^{xy}) dy = y^2 - e^{xy} + c_1$$

$$F(x, y) = \int M dx = \int -(2 + ye^{xy}) dx = -2x - e^{xy} + c_2$$

$$\Rightarrow F(x, y) = y^2 - e^{xy} - 2x + k \quad (k = c_1 + c_2)$$

● عامل (فاکتور) انتگرال ساز

عامل انتگرال ساز یا فاکتور انتگرال ساز می‌گوییم: $\mu(x, y)$
اگر معادله $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ غیر کامل باشد. $\left(\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ ولی معادله
کامل $\left(\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\right)$ $\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$.

● حالات مختلف برای $\mu(x, y)$ (عامل انتگرال ساز)

در معادله غیر کامل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$:

حالت اول: اگر $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$ (تابعی از x) $\leftarrow \mu$ تابعی از x و $\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$

حالت دوم: اگر $\frac{M_y - N_x}{-M} = g(y)$ (تابعی از y) $\leftarrow \mu$ تابعی از y و $\mu(y) = e^{\int g(y)dy}$

حالت سوم: اگر $\frac{M_y - N_x}{yN - xM} = h(z)$ $\leftarrow \mu$ تابعی از $z = xy$ و $\mu(x, y) = e^{\int h(z)dz}$

حالت چهارم: اگر در معادله دیفرانسیل ناکامل، M و N چند جمله‌هایی بر حسب x و y باشند: $\mu = x^\alpha y^\beta$

(حالت‌های دیگری هم وجود دارد، این قسمت فقط حالت‌های پرکاربرد آورده شده است)

● روش حل معادلات غیر کامل

۱. یافتن عامل انتگرال ساز در معادله غیر کامل با استفاده از نکات فوق

۲. ضرب عامل انتگرال ساز در معادله غیر کامل

۳. حل معادله کامل شده

مثال: یک عامل انتگرال ساز برای معادله دیفرانسیل $(e^x - \sin y)dx + \cos y dy = 0$ پیدا کرده و آن را حل کنید.

در نتیجه $\mu(x)$ در طرفین معادله ضرب $\mu(x) = e^{-x} \Rightarrow \frac{My - Nx}{N} = \frac{-\cos y}{\cos y} = -1$

$$\Rightarrow (1 - e^{-x} \sin y)dx + e^{-x} \cos y dy = 0 \Rightarrow My = Nx = -e^{-x} \cos y$$

معادله کامل است.

حال با روش‌های گفته شده داریم:

$$M = 1 - e^{-x} \sin y \quad N = e^{-x} \cos y$$

$$\Rightarrow F(x, y) = \int e^{-x} \cos y dy = e^{-x} \sin y + c_1 \Rightarrow F(x, y) = \int (1 - e^{-x} \sin y) dx$$

$$= x + e^{-x} \sin y + c_r$$

$$(k = c_1 + c_r)$$

$$F(x, y) = x + e^{-x} \sin y + k$$

مثال: عامل انتگرال سازی برای معادله زیر پیدا کرده، آن $xydx + (1 + x^r)dy = 0$ را حل کنید.

$$M = xy \quad \text{و} \quad N = 1 + x^r$$

معادله کامل نیست (به عنوان تمرین بررسی کنید)

$$g(y) = \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{x - rx}{-xy} = \frac{1}{y} \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{Lny} = y$$

با ضرب طرفین در y داریم

$$\rightarrow xy^r dx + y(1 + x^r)dy = 0$$

معادله کامل است.

(توجه داشته باشید اگر در این نوع معادلات به این مرحله رسیدید و مشخص شد معادله همچنان کامل نیست، حتماً در فرایند محاسبه μ اشتباه کرده‌اید)

$$\Rightarrow xy^r dx + (1 + x^r)dy = 0$$

تابعی مانند F وجود دارد بطوری که:

$$\begin{cases} M = xy^r \Rightarrow \int M dx = \int xy^r dx \Rightarrow F = \frac{x^r y^r}{r} + c_1(1) \\ N = (1 + x^r)y \Rightarrow \int N dy = \int (y + yx^r) dy \Rightarrow F = \frac{y^r}{r} + \frac{y^r x^r}{r} + c_2(2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{از (1) و (2)}} F(x, y) = \frac{x^r y^r}{r} + \frac{y^r}{r} + k$$

مثال: عامل انتگرال ساز برای معادله دیفرانسیل زیر پیدا کنید.

$$(y^r + xy^r + y)dx + (x^r + x^r y + x)dy = 0$$

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \frac{(ry^r + rxy + 1) - (rx^r + rxy + 1)}{x^r y + x^r y^r + xy - y^r x - x^r y^r - xy} \\ &= \frac{ry^r - rx^r}{x^r y - y^r x} = \frac{-r(x^r - y^r)}{xy(x^r - y^r)} = \frac{-r}{xy} \Rightarrow \mu(xy) = e^{\int \frac{-r}{xy} d(xy)} = e^{-rLn(xy)} = (xy)^{-r} = \frac{1}{(xy)^r} \end{aligned}$$

مثال: عامل انتگرال ساز را برای معادله مقابل پیدا کنید.

$$(x^r + xy^r)y' - 3xy + 2y^r = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ابتدا مرتب می کنیم (بصورت)}} (Mdx + Ndy) \rightarrow (-3xy + 2y^r)dx + (x^r + xy^r)dy = 0$$

(چون هیچ یک از حالت های ۱و ۲و ۳ نیست پس از حالت چهارم):

$$(-3x^{\alpha+1}y^{\beta+1} + 2x^{\alpha}y^{\beta+2})dx + (x^{\alpha+2}y^{\beta} + x^{\alpha+1}y^{\beta+2})dy = 0 \quad \mu = x^{\alpha}y^{\beta}$$

$$M_y = N_x \Rightarrow -3(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta} + 2(\beta+2)x^{\alpha}y^{\beta+1} = (\alpha+2)y^{\beta}x^{\alpha+1} + (\alpha+1)y^{\beta+2}x^{\alpha}$$

(در معادله بالا توجه داشته باشید در قسمت اول هر دو طرف، برای اینکه دو عبارت

$$-3(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta} = (\alpha+2)y^{\beta}x^{\alpha+1}$$

ضربها

سپس:

$$\begin{cases} -3(\beta+1) = \alpha+2 \\ 2\beta+2 = \alpha+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\beta = \alpha+5 \\ 2\beta = \alpha-5 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = -2 \Rightarrow \mu = \frac{x}{y^2}$$

نوع دیگری از معادلات دیفرانسیل هستند که با استفاده از مشتق گیری قابل حل هستند. ابتدا چند نکته از ریاضی عمومی به عنوان یادآوری ارائه می کنیم:

$$۱) d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2} \quad \text{یا} \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$۲) d(xy) = ydx + xdy \quad ۳) d(\ln(xy)) = \frac{xdy + ydx}{xy}$$

$$۴) d\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

قسمت ۴ را اثبات کنید.

مثال: معادله دیفرانسیل $(x + x^r y)dy + (xy^r - y)dx = 0$ را حل کنید.

$$x^r ydy + xy^r dx = ydx - xdy \Rightarrow xy(xdy + ydx) = ydx - xdy$$

حل:

معادله در $\frac{1}{y^r}$ ضرب می کنیم (از این به بعد هر کجا به عبارت $ydx - xdy$ رسیدیم، برای

استفاده از دیفرانسیل، این روند را اجرا کنید)

$$\frac{x}{y}(xdy + ydx) = \frac{ydx - xdy}{y^2} \Rightarrow \frac{x}{y}d(x \cdot y) = d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{x}{y} \xrightarrow{\frac{x}{y}} \int d(xy) = \int \frac{y}{x} d\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow xy = \ln \frac{x}{y} + c$$

پس عامل انتگرال ساز معادله $\frac{1}{xy} = \frac{1}{y^2} \times \frac{y}{x}$ است. (یکبار معادله را در $\frac{1}{y^2}$ ضرب می کنیم و

یکبار در $\frac{y}{x}$)

توجه داشته باشید حاصلضرب تمام عبارت های کمکی، که باعث می شود در جواب عبارت ها تبدیل به فرمول های دیفرانسیل شوند را حامل انتگرال ساز می گوئیم.

مثال: معادله دیفرانسیل $(4x^2 + 9y^2)(4xdx + 9ydy) = xdy - ydx$ را حل کنید.

حل:

$$\frac{xdy - ydx}{4x^2 + 9y^2} = 4xdx + 9ydy$$

طرف راست به صورت دیفرانسیل کامل است، ولی در طرف چپ، صورت و مخرج را تقسیم بر x^2 می کنیم:

$$\frac{xdy - ydx}{4 + 9\left(\frac{y^2}{x^2}\right)} = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{4 + 9\left(\frac{y^2}{x^2}\right)} = 2d(x^2) + \frac{9}{2}d(y^2) \Rightarrow \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{4 + 9\left(\frac{y^2}{x^2}\right)} = 2d(x^2) + \frac{9}{2}d(y^2) \Rightarrow$$

$$\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{4\left(1 + \left(\frac{3y}{2x}\right)^2\right)} = 2d(x^2) + \frac{9}{2}d(y^2)$$

صورت و مخرج طرف چپ را در $\frac{3}{2}$ ضرب می کنیم:

$$\frac{\frac{3}{2}d\left(\frac{y}{x}\right)}{6\left[1 + \left(\frac{3y}{2x}\right)^2\right]} = 2d(x^2) + \frac{9}{2}d(y^2) \Rightarrow \frac{d\left(\frac{3y}{2x}\right)}{6\left[1 + \left(\frac{3y}{2x}\right)^2\right]} = 2d(x^2) + \frac{9}{2}d(y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}d\left(\tan^{-1}\left(\frac{3y}{2x}\right)\right) = 2d(x^2) + \frac{9}{2}d(y^2)$$

سپس با انتگرال گیری جواب عمومی بدست می آید:

$$\frac{1}{6} \tan^{-1} \left(\frac{3y}{2x} \right) = 2x^2 + \frac{9}{2} y^2 + c$$

● معادلات خطی مرتبه اول

فرمول کلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به صورت زیر است:

$$a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

مراحل حل:

۱. تقسیم ضریب y' برطرفین معادله فوق (یعنی $a_1(x)$)

$$y' + p(x)y = q(x) \Leftarrow (\text{معادله استاندارد})$$

۲. عامل انتگرال ساز معادله استاندارد $\mu(x, y) = e^{\int p(x)dx}$

۳. با ضرب $\mu(x, y)$ در طرفین معادله استاندارد و انتگرال گیری داریم:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c \right]$$

۴. جایگذاری و انتگرال گیری در فرمول مرحله سوم.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول زیر را بنویسید.

$$(x \neq 0) \quad x \frac{dy}{dx} + 3y = \frac{\sin x}{x}$$

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{\sin x}{x^2}, \quad p(x) = \frac{3}{x}, \quad q(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

$$y = e^{\int -\frac{3}{x}dx} \cdot \left[\int \frac{\sin x}{x^2} \cdot e^{\int \frac{3}{x}dx} dx + c \right] \rightarrow y = x^{-3} \left[\int \frac{\sin x}{x^2} x^3 dx + c \right]$$

$$\rightarrow y = x^{-3} \left[\int x \sin x dx + c \right]$$

$$y = x^{-3} [-x \cos x + \sin x + c] \rightarrow y = -x^{-2} \cos x + x^{-3} \sin x + cx^{-3}$$

حل انتگرال $\int x \sin x dx$ با روش جزء به جزء (جدول) که در ریاضی عمومی

فراگرفته ایم:

● معادلات قابل تبدیل به معادلات خطی مرتبه اول

بعضی از معادلات با جایگذاری $y' = \frac{1}{x'}$ در معادله، قابل تبدیل به معادله خطی مرتبه

اول هستند.

مثال: جواب معادله دیفرانسیل $y'(xy + \sqrt{1-y^2} \sin y) = 1-y^2$ را بیابید.

معادله بر حسب y خطی نیست با قرار دادن $\frac{1}{x'}$ به جای y' داریم:

$$1-y^2 = \frac{1}{x'}(xy + \sqrt{1-y^2} \sin y) \Rightarrow x' = \frac{xy}{1-y^2} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-y^2} \sin y$$

$$\Rightarrow x' = \frac{xy}{1-y^2} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \sin y \Rightarrow x' - \frac{y}{1-y^2} x = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \sin y$$

$$x \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{-y}{1-y^2} dy} = e^{\frac{1}{2} \ln|1-y^2|} = \sqrt{1-y^2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left(\int \sin y dy + c \right)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left(\int \frac{\sin y}{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} dy + c \right)$$

● معادله برنولی

معادله برنولی مرتبه n ، به ازای $n \neq 0, 1$ به صورت زیر می‌باشد:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

می‌توان با تغییر $z = y^{1-n}$ می‌توان معادله برنولی را به معادله خطی مرتبه اول تبدیل کرد.

با تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ داریم:

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x)$$

فرمول بالا را به عنوان **فرمول برنولی** به خاطر بسپارید.

به مثال زیر توجه کنید.

مثال: جواب معادله دیفرانسیل $y'(2xy + 2x^2 y^2) = 1$ را بیابید.

$$y' = \frac{1}{x'} \rightarrow (2xy + 2x^2 y^2) \frac{1}{x'} = 1 \Rightarrow (2xy + 2x^2 y^2) = x'$$

$$\Rightarrow x' - 2xy = 2x^2 y^2 \Rightarrow x' - 2yx = 2y^2 x^2$$

معادله بر حسب x برنولی است، پس با تغییر متغیر $z = x^{1-2} = x^{-1}$ داریم:

$$\Rightarrow x^{-1} = z \Rightarrow -x^{-2} x' = z' \Rightarrow -z' - 2yz = 2y^2 \Rightarrow z' + 2yz = -2y^2$$

$$\begin{aligned}
 z' + ryz &= -ry^r \Rightarrow \mu(y) = e^{\int p(y)dy} = e^{\int rydy} = e^{ry^r} \\
 z &= \frac{1}{\mu(y)} \left(\int \mu(y)q(y)dy + c \right) = \frac{1}{e^{ry^r}} \left(\int e^{ry^r} (-ry^r) dy + c \right) \\
 &= e^{-ry^r} \left(-\int e^{ry^r} (ry) y^r dy + c \right) \\
 &= e^{-ry^r} \left(-y^r e^{ry^r} + \int e^{ry^r} (ry) dy + c \right) = e^{-ry^r} \left(-y^r e^{ry^r} + e^{ry^r} + c \right) = -y^r + 1 + ce^{-ry^r} \\
 \Rightarrow x^{-1} &= 1 - y^r + ce^{-ry^r} \Rightarrow x = \frac{1}{1 - y^r + ce^{-ry^r}}
 \end{aligned}$$

مثال: جواب عمومی معادله $y' + xy = \frac{x}{y^r}$, $y \neq 0$ را بدست آورید.

معادله برنولی است با $n = -r$:

$$\begin{aligned}
 xy^r &\rightarrow y^r y' + xy^r = x \Rightarrow z = y^r \quad (\text{تغییر متغیر}) \\
 \Rightarrow \frac{dz}{dx} &= r y^r y' \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{dz}{dx} + xz = x \Rightarrow \frac{dz}{dx} + r xz = rx \\
 \text{عامل انتگرال ساز} &\Rightarrow \mu(x) = e^{\int r x dx} = e^{rx^r} \\
 \text{در معادله} &\Rightarrow e^{rx^r} \frac{dz}{dx} + r x e^{rx^r} z = r x e^{rx^r}
 \end{aligned}$$

(یک تکنیک جدید استفاده کردیم، زمانی که μ را محاسبه کردیم، مقدار μ را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم)

$$e^{rx^r} \frac{dz}{dx} + r x e^{rx^r} z = r x e^{rx^r} \Rightarrow e^{rx^r} dz + r x e^{rx^r} z dx = r x e^{rx^r} dx$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \Rightarrow d\left(ze^{rx^r}\right) = r x e^{rx^r} dx$$

$$\xrightarrow{z = y^r} z e^{rx^r} = e^{rx^r} + c \Rightarrow z = e^{-rx^r} \left(e^{rx^r} + c \right) y^r = 1 + ce^{-rx^r}$$

● معادلهٔ ریکاتی

به صورت کلی:

$$y' = f_0(x) + f_1(x)y + f_r(x)y^r, \quad (f_r(x) \neq 0)$$

حل:

اگر $y_1(x)$ یک جواب خصوصی از معادله بالا باشد، آنگاه تغییر متغیر:

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \quad , \quad y' = y_1' - \frac{1}{u^2} u'$$

معادله را به معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر تبدیل می‌کند:

$$u' + [f_1(x) + 2f_2(x)y_1]u = -f_2(x)$$

(معادله ریکاتی در حالت کلی قابل حل نیست، با این شرط که یک جواب خصوصی مانند y_1 داشته باشیم قابل حل است).

توجه داشته باشید اگر معادله خطی مرتبه اول باشد، و یک جواب خصوصی داشت می‌توان حدس زد که معادله، یک معادله ریکاتی است.

مثال: اگر $y_1 = x$ جواب خصوصی معادله $y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$ باشد، جواب عمومی آن را

بیابید.

حل:

جواب عمومی معادله فوق $y = x + \frac{1}{u}$ است.

$$y' = 1 + \frac{-u'}{u^2} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} \frac{-u'}{u^2} = -\frac{1}{ux} - \frac{1}{u^2 x^2}$$

با ضرب $-u^2$ داریم:

$$u' - \frac{1}{x}u = \frac{1}{x^2}$$

حال این معادله یک معادله خطی مرتبه اول است پس:

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow u = x \left(\int \frac{1}{x^2} \frac{1}{x} dx + c \right) = x \left(\int \frac{1}{x^3} dx + c \right) = x \left(\frac{-1}{2x^2} + c \right) = \frac{-1}{2x} + cx$$

و جواب عمومی معادله ریکاتی برابر است با:

$$y = x + \frac{1}{u} = x + \frac{1}{-\frac{1}{2x} + cx}$$

● معادله کلو

دسته دیگری از معادلات مرتبه اول معادلاتی به فرم زیر هستند:

$$y = xy' + g(y')$$

با انتخاب $y' = p$ مشتق گیری از معادله فوق و جایگذاری داریم:

$$\frac{dp}{dx}(x + g'(p)) = 0$$

اگر $\frac{dp}{dx} = 0 \Leftarrow$ جواب عمومی معادله:

$$y = cx + g(c)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -g'(p) \\ y = xp + g(p) \end{array} \right\} \text{اگر } p \Leftarrow x + g'(p) \Leftarrow -g'(p) \text{ در دستگاه جواب غیر عادی}$$

حاصل می شود.

نکته

اگر $g(p)$ تابعی ثابت و یا خطی بر حسب p نباشد، جواب غیر عادی معادله کلو یک منحنی است و لذا از جواب عمومی $y = cx + g(c)$ بدست نمی آید.

مثال: خانواده یک پارامتری جواب های معادله کلو $y = y'x + (y')^2$ را پیدا کرده و پوش های جواب ها را مورد بررسی قرار دهید.

$$y' = p \Rightarrow y = xp + (p)^2 \Rightarrow \frac{dp}{dx}(x + 2p) = 0$$

حالت اول

اگر $\frac{dp}{dx} = 0 \Leftarrow$ جواب عمومی معادله:

$$(p = c) \Rightarrow y = cx + c^2$$

حالت دوم

اگر $x = -2p \Leftarrow x + 2p = 0$ جواب غیر عادی معادله کلو:

$$\begin{cases} x = -2p \\ y = xp + p^2 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{-x}{2} \Rightarrow y = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \Rightarrow y = \frac{-x^2}{4}$$

فصل دوم معادلات خاص

برخی معادلات مرتبه دوم تحت شرایط خاص به معادلات مرتبه اول تبدیل می شوند:

(الف) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم فاقد متغیر:

$$y: \Rightarrow f(x, y', y'') = 0.$$

(ب) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم فاقد متغیر:

$$x: \Rightarrow f(y, y', y'') = 0.$$

در دسته بندی بالا ابتدا حالت (الف) را بررسی می کنیم:

۱. با تغییر متغیر $\begin{cases} y' = p \\ y'' = p' \end{cases} \Leftrightarrow$ تبدیل به معادله مرتبه اول می شوند، به صورت

$$f(x, p, p') = 0.$$

۲. حل $f(x, p, p') = 0$ با تکنیک های مربوط (فصل اول) حل می کنیم.

مثال: معادله دیفرانسیل $xy'' = 2(y'^2 - y')$ را حل کنید.

حل:

قرار می دهیم:

$$p = y' \rightarrow xp' = 2(p^2 - p)$$

با جدا کردن متغیرها:

$$\rightarrow x \frac{dp}{dx} = 2(p^2 - p) \rightarrow \frac{dp}{p^2 - p} = \frac{2dx}{x}, x \neq 0, p \neq 0, 1$$

$$\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) dp = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \ln \left| \frac{p-1}{p} \right| = \ln |x| + c_1$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - c_1 x^r}$$

$$\rightarrow \frac{p-1}{p} = c_1 x^r \rightarrow p = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - c_1 x^r}$$

$$\begin{cases} c_1 > 0 \rightarrow c_1 = a^r \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - a^r x^r} \rightarrow y = \frac{1}{ra} \ln \left| \frac{1+ax}{1-ax} \right| + c_r \\ c_1 < 0 \rightarrow c_1 = -a^r \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - a^r x^r} \rightarrow y = \frac{1}{a} \tan^{-1} ax + c_r \end{cases}$$

اگر $p = 1$, $p = 0$ پ نگاه داریم: $y = c$ و $y = x + c$ جواب‌های معادله اولیه مسئله است.

حل معادلاتی از نوع (ب): $f(y, y', y'') = 0$

$$1. \text{ با تغییر متغیر: } \begin{cases} y' = p \\ y'' = \frac{dp}{dy} p \end{cases} \Leftrightarrow \text{تبدیل به معادله مرتبه اول} \quad f\left(y, p, \frac{dp}{dy} \cdot p\right) = 0$$

$$2. \text{ حل } f\left(y, p, \frac{dp}{dy} \cdot p\right) = 0 \text{ با تکنیک‌های مربوطه}$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y'' + \epsilon y = 0$ را حل کنید.

حل: با تغییر متغیر: $y' = p$, $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ داریم:

$$\text{جایگذاری} \rightarrow p \cdot \frac{dp}{dy} + \epsilon y = 0 \rightarrow p \cdot dp + \epsilon y \cdot dy = 0$$

$$\xrightarrow{\text{با انتگرال گیری}} p = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{k^2 - y^2} \quad p^2 + \epsilon y^2 = \epsilon k^2 \rightarrow$$

حال معادله مرتبه اول را حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{با انتگرال گیری}} \frac{dy}{\sqrt{k^2 - y^2}} = \pm dx \quad \sin^{-1} \left(\frac{y}{k} \right) = \pm x + c$$

$$\frac{y}{k} = \sin(\pm x + c) \rightarrow y = k \sin(\pm x + c)$$

یا به عبارتی:

$$\begin{aligned} c_1 &= A \cos \beta \\ c_2 &= A \sin \beta \end{aligned} \quad y = A \sin(\alpha x + \beta) \rightarrow y = c_1 \sin \alpha x + c_2 \cos \alpha x$$

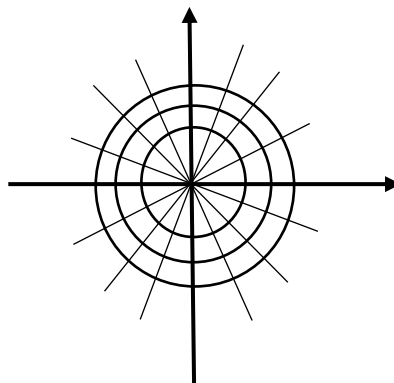
● مسیرهای متعامد

یک منحنی که هر عضو یک خانواده ۱- پارامتری از منحنی‌ها را با زاویه ۹۰ درجه قطع کند، یک مسیر متعامد از خانواده نامیده می‌شود. دو خانواده ۱- پارامتری را مسیرهای متعامد می‌نامیم. اگر هر عضو یک خانواده، هر عضو خانواده دیگر را با زاویه قائمه قطع می‌کند.

از قبل می‌دانیم: اگر y'_1 شیب خانواده دسته منحنی داده شده و y'_2 شیب خانواده مسیر متعامد باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$y'_1 \cdot y'_2 = -1 \quad \text{یا} \quad y'_2 = -\frac{1}{y'_1}$$

مثال: خانواده خطوط $y = c_1 x$ و دایره $x^2 + y^2 = c_2$ دو خانواده متعامد هستند زیرا طبق شکل در هر نقطه تلاقی هر دایره با هر خط عمود هستند.



برای بدست آوردن مسیرهای متعامد به روش زیر اقدام می‌کنیم:

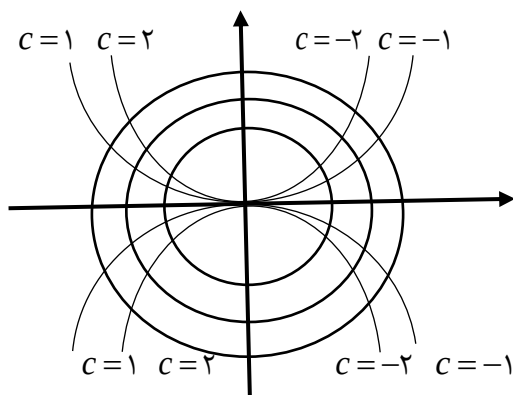
۱. به دست آوردن معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های داده شده $f(x, y, c) = 0$.
۲. جایگزین کردن $-\frac{1}{y'}$ به جای y' در معادله به دست آمده.
۳. حل معادله جدید.
۴. اگر جواب معادله جدید به صورت $g(x, y, c) = 0$ باشد. این خانواده، مسیرهای متعامد مورد نظر است.

مثال: مسیرهای متعامد بر خانواده ۱- پارامتری منحنی $y = cx^5$ را پیدا کنید ($x \neq 0$)

$$\begin{cases} y' = 5cx^4 \\ c = \frac{y}{x^5} \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{5y}{x} \Rightarrow \frac{-1}{y'} = \frac{5y}{x} \Rightarrow y' = \frac{-x}{5y}$$

۵ یک خانوادهٔ ۱- پارامتری از بیضی‌هاست $(x, y \neq 0)$ و $x^2 + 5y^2 = k$

$$\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2 = 1 \quad (\text{معادلهٔ بیضی‌ها به صورت:})$$



● کاربردهای معادلات دیفرانسیل

در این بخش ما مسایل مختلفی را مطرح می‌کنیم که می‌توان یک مدل ریاضی به آن‌ها نسبت داد و برای هر یک معادلهٔ دیفرانسیلی تنظیم نمود.

● تحلیل رادیواکتیو (خاصیت مشترک در تحلیل عناصر رادیواکتیو)

میزان تحلیل یک مادهٔ معین در هر لحظه متناسب با مقدار ماده در همان لحظه باشد. (وزن اولیهٔ مادهٔ رادیواکتیو با توجه به زمان کم می‌شود)

با استفاده از قانون تحلیل (در علم فیزیک) داریم:

اگر $N = N(t)$ مقدار ماده در لحظه t و $N' = N'(t)$ میزان تغییرات در لحظه t باشد:

$$N' = -KN \quad (\text{قانون تحلیل})$$

K ثابت مثبت است که مقدار واقعی آن بستگی به عنصر خاص تحلیل رونده دارد. نزول N با ازدیاد t ، علامت منفی ایجاد می‌کند. N' همیشه منفی است.

حل:

$$1. \text{ باحل معادله دیفرانسیل } N' = -KN \text{ خواهیم داشت: } N(t) = N(0)e^{-kt}$$

۲. برای تعیین مقدار ماده در لحظه t ، بایستی مقدار اولیه $N(0)$ و ثابت K را بدانیم.

● پدیدهٔ سرمایش

جسمی بدون گرم‌کنندهٔ داخلی، با دمایی بالاتر از دمای محیط اطراف سرد خواهد شد.

اگر $T_m(t)$: دمای جسم در لحظه t, T_s : دمای جسم در لحظه $t=0$, T_s : دمای ثابت محیط؛ تابع دمای جسم را بدست آورید.
حل: طبق قانون نیوتون:

$$\frac{dT_m}{dt} \propto (T_m - T_s) \Rightarrow \frac{dT_m}{dt} = -k(T_m - T_s), (k > 0)$$

$$\ln|T_m - T_s| = -kt + c \xrightarrow{\text{بانتگرال گیری}} \Rightarrow \frac{dT_m}{T_m - T_s} = -kdt \text{ با جدا کردن متغیرها}$$

$$|T_m - T_s| = e^{-kt+c} = e^{-kt} e^c \quad (e^c = c_1)$$

$$\begin{cases} (e^c = c_1) \\ T_m(0) = T_s \end{cases} \Rightarrow c_1 = |T_s - T_s| \xrightarrow{\text{جایگذاری}} T_m(t) = T_s + (T_s - T_s)e^{-kt}$$

مثال: جسمی را که دمای 180°C است درمایی که دمای آن در 60°C ثابت نگه داشته شده است وارد می‌کنیم. اگر بعد از ۱ دقیقه دمای جسم به 120°C کاهش یابد، چه مدت طول می‌کشد تا دمای جسم به 90°C برسد؟

حل: فرض کنیم T نمایش دمای جسم در لحظه t با $T_s = 60^\circ\text{C}$ داریم:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 60)$$

با استفاده از شرایط داده شده و انتگرال گیری داریم:

$$\int_{T=180}^{120} \frac{dt}{T - 60} = -k \int_{t=0}^{t=1} dt \rightarrow \ln 0.5 = -k \rightarrow k = \ln 2$$

$$\int_{T=180}^{90} \frac{dt}{T - 60} = -k \int_{t=0}^t dt \rightarrow \ln 0.25 = -(\ln 2)t \rightarrow t = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = 2$$

از این رو دو دقیقه طول می‌کشد تا دمای جسم به 90°C کاهش یابد.

● معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n :

فرم کلی معادله خطی مرتبه n ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = r(x) \quad \forall n \geq 0$$

حال اگر $r(x) = 0$ باشد معادله را همگن و اگر $r(x) \neq 0$ باشد معادله را غیرهمگن

می‌گوییم.

(این تعریف با تعریف معادلات همگن قسمت‌های قبل متفاوت است و برای معادلات مراتب بالاتر از یک می‌باشد)

● عملگر مشتق

معرف عملگر مشتق $D = \frac{d}{dx}$ می‌باشد پس می‌توان D را عملگر دیفرانسیل هم نامید بنابراین:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y = D_y$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} y = D_y^2$$

•
•
•

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n} y = D_y^n$$

که با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داریم:

$$D_y^n + a_{n-1} D_y^{n-1} + \dots + a_1 D_y + a_0 y = r(x) \Rightarrow (D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) y = r(x)$$

که در آن $L(D) = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$ عملگر چند جمله‌ای است و با جایگذاری r به جای D معادله مشخصه (شاخص) $L(r) = r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$ بدست می‌آید.

مثال: معادله دیفرانسیل $XY''' + Y'' - (X+1)Y' + \left(1 + \frac{1}{X}\right)Y = 0$ را به صورت $LY = 0$

بنویسید.

با در نظر گرفتن عملگرها برای Y داریم:

$$L = XD^3 + D^2 - (X+1)D + \left(1 + \frac{1}{X}\right)$$

قضیه

اگر توابع X و Y حداقل n بار مشتق پذیر و c عددی ثابت باشد، آنگاه:

$$L(cY) = cL(Y)$$

$$L(X+Y) = LX + LY$$

نتیجه

اگر X و Y دو تابع، C_1 و C_2 اعدادی ثابت باشند آنگاه:

$$L(C_1 Y + C_2 X) = C_1 LY + C_2 LX$$

تعریف

دو عملگر L_l و L_r را برابر می‌گوییم اگر و تنها اگر:

$$\forall y \quad L_l y = L_r y$$

مشروط بر اینکه:

$$(۱) \quad (L_l + L_r)y = L_l y + L_r y$$

$$(۲) \quad (L_l L_r)y = L_l (L_r y)$$

قضیه

چند جمله‌های عملگر و دلخواه $R(D), Q(D), P(D)$ دارای خاصیت‌های جابه‌جایی و شرکت‌پذیری هستند یعنی:

$$P(D) \cdot Q(D) = Q(D) \cdot P(D)$$

$$P(D)[Q(D) \cdot R(D)] = [P(D) \cdot Q(D)] \cdot R(D)$$

● توابع مستقل خطی

توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ تعریف شده بر I مستقل خطی هستند اگر:

$$\forall x \in I \quad c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$$

نتیجه دهد: $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$ در غیر این صورت وابسته خطی هستند.

مثال: نشان دهید $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$ مستقل خطی هستند.

حل: طبق تعریف داریم:

$$\left. \begin{aligned} \forall x \rightarrow c_1 e^x + c_2 e^{-x} &= 0 \quad (۱) \\ x=0 \Rightarrow c_1 + c_2 &= 0 \quad (۲) \\ \rightarrow c_1 e^x - c_2 e^{-x} &= 0 \\ x=0 \Rightarrow c_1 - c_2 &= 0 \quad (۳) \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \quad (۲) \text{ و } (۳)$$

● قضیه (وجود یکتایی)

اگر

$$۱) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

$$۲) \quad I = (a, b) \text{ روی بازه } r, q, p$$

$$۳) \quad x \in (a, b)$$

آنگاه معادله دارای جواب یکتاست، مشروط بر اینکه:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

برای روشن شدن قضیه فوق به مثال زیر توجه کنید:

مثال: توابع $\sin x$ و $\cos x$ هر دو جواب‌های معادله $y'' + y = 0$ می‌باشند، ولی تنها جوابی که در شرط $y(0) = 1, y'(0) = 0$ صدق می‌کند $y = \cos x$ است.

قضیه

اگر $y_p(x)$ یک جواب خصوصی معادله:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = r(x)$$

و y_h یک جواب عمومی همگن (نظیر) باشد، آنگاه: $y = y_h + y_p$ جواب عمومی معادله است.

قضیه

اگر y_1 تا y_n جواب مستقل خطی (جواب عمومی) معادله:

$$y^n + p_1(x)y^{n-1} + \dots + p_n(x)y = 0$$

باشد، آنگاه:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

جواب عمومی معادله است.

● تعریف رونسکین

اگر دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ روی فاصله (a, b) مشتق‌پذیر باشند عبارت:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} (x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

را رونسکین دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ می‌نامند.

تعریف

فرض کنید توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ بر بازه I تعریف شده و دست کم $n-1$ بار مشتق پذیر باشند، دترمینان:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \dots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \dots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

را رونسکین توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ در نقطه x می نامیم و آن را با $W(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ یا گاهی با نماد $W(x)$ نمایش می دهیم.

قضیه

اگر y_1 و y_2 مستقل خطی باشند آنگاه: $W(y_1, y_2) \neq 0$
(تذکره: برعکس قضیه بالا درست نیست)

مثال: آیا توابع $1, x, \frac{1}{x}$ مستقل هستند؟

$$\begin{vmatrix} 1 & x & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{2}{x^3} \neq 0 \quad W\left(1, x, \frac{1}{x}\right) =$$

✓ یادآوری (ماتریس بالا مثلثی است لذا دترمینان برابر است با حاصلضرب قطر اصلی)

مثال: توابع $4x, -3x, x, -2x$ وابسته خطی هستند.

$$\begin{vmatrix} 4x & -3x & x & -2x \\ 4 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad W(4x, -3x, x, -2x) = 0$$

✓ یادآوری (دترمینان ماتریس که یک سطری ستون صفر داشته باشد برابر صفر است)

● روش کاهش مرتبه (دالامبر)

اگر $y_1(x) \neq 0$ یک جواب معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ آنگاه:

$y_2(x) = y_1(x)V(x)$ جواب دوم مستقل خطی نسبت به $y_1(x)$ است که

$$V = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$$

بنابراین جواب عمومی معادله است.

مثال: اگر $y_1 = e^x$ یک جواب $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 0$ باشد، جواب عمومی را بیابید.

❗ نکته تستی ❗

(در معادلات درجه دوم، سوم و... مجموع ضرایب اگر صفر باشد یکی از ریشه‌ها یک است، مشابه همین مطلب در اینجا صدق می‌کند: مجموع ضرایب اگر صفر شود یکی از ریشه‌ها e^x است)

ابتدا معادله را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$y'' + \frac{2(1-x)}{x}y' + \frac{(x-2)}{x}y = 0.$$

$$V(x) = \int \frac{1}{e^{rx}} e^{\int \frac{x-1}{x} dx} dx = \int \frac{1}{e^{rx}} e^{rx - r \ln x} dx$$

$$V(x) = \int \frac{1}{e^{rx}} \cdot e^{rx} \cdot e^{-\frac{r \ln x}{x}} dx = \int \frac{1}{x^r} dx = -\frac{1}{x}$$

$$y_2(x) = Vy_1 = -\frac{1}{x}e^x \quad y(x) = c_1 e^x - c_2 \frac{e^x}{x} \quad (\text{جواب عمومی})$$

● جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت

اگر $a, b \in \mathbb{R}$ و $y'' + ay' + by = 0$ باشد در این صورت:

$r^2 + ar + b = 0$ را معادله شاخص یا مفسر یا کمکی وابسته به معادله دیفرانسیل می‌گوییم

و برای ریشه‌های آن سه حالت داریم:

حالت اول:

$(\Delta > 0)$ و $r_1 \neq r_2$ ریشه‌ها حقیقی و متمایز هستند. در این صورت $e^{r_1 x}$ و $e^{r_2 x}$ دو جواب

مستقل هستند. لذا: $y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

مثال: معادله $y'' - 3y' + 2y = 0$ را حل کنید.

حل:

معادله کمکی، معادله فوق به صورت: $r^2 - 3r + 2 = 0$

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

حالت دوم:

($\Delta = 0$) آنگاه $r_1 = r_2 = r = -\frac{b}{2}$ و ریشه‌های تکراری، $y_1 = e^{rx}$ یک جواب است.

اگر از کاهش مرتبه استفاده کنیم:

$$y_2(x) = x e^{rx}.$$

$$\text{لذا: } y_h(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

مثال: معادله $y'' - 6y' + 9y = 0$ را حل کنید.

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r - 3)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 3$$

$$y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

حالت سوم:

($\Delta < 0$) و ریشه‌ها مختلط باشند: $r = \alpha \pm \beta i$

$$y_h = e^{\alpha x} [c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x]$$

در این صورت: , دو جواب مستقل خطی هستند.

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' + 2y = 0$ را حل کنید.

حل:

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm i \Rightarrow \beta = 1, \alpha = -1$$

نکته

توجه داشته باشید:

$$\sqrt{-1} = i, \sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

پس جواب عمومی: $y_h(x) = e^{-x} [c_1 \cos x + c_2 \sin x]$

● روش‌های یافتن y_p

تاکنون معادلاتی که بررسی شدند، مرتبه دوم همگن بودند، در این قسمت معادلاتی مورد بررسی قرار می‌گیرند که غیرهمگن هستند.

برای معادلات غیرهمگن جواب خصوص وجود دارد (یا y_p)، به دو روش می‌توان y_p را محاسبه کرد: ۱. روش ضرایب نامعین ۲. روش تغییر پارامتر

ابتدا به روش اول یعنی ضرایب نامعین می‌پردازیم؛ روش ضرایب نامعین وقتی که ضرایب معادله دیفرانسیل ثابت و $r(x)$ چند جمله‌ای، نمایی، سینوسی و کسینوسی یا ضرب این توابع درهم باشد.

● حالت‌های $r(x)$ و محاسبه y_p متناظر با $r(x)$:

۱. اگر $r(x) = p_n(x)$ و $p_n(x)$ چندجمله‌ای از درجه n باشد، داریم:

$$y_p = x^s Q_n(x)$$

s : تکرار صفر در ریشه‌های شاخص می‌باشد.

$Q_n(x)$: چند جمله‌ای با ضرایب مجهول از درجه n است.

مثال: جواب خصوصی $y'' - 2y' = x^2 + 1$ را بدست آورید.

$$r^2 - 2r = 0 \Rightarrow r(r-2) = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 0 \Rightarrow s = 1 \\ r_2 = 2 \end{cases}$$

$$y_p(x) = x'(Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx^2 + Cx$$

$$y_p'(x) = 2Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y_p''(x) = 4Ax + 2B$$

$$y_p'' - 2y_p' = -4Ax^2 + (4A - 4B)x + 2B - 2C = x^2 + 1$$

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{4} \\ B &= -\frac{1}{4} \\ C &= -\frac{3}{4} \end{aligned} \right\} y_p(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$$

۲. اگر $r(x)$ حاصلضرب چندجمله‌ای از درجه n و تابع نمایی به صورت:

$$r(x) = p_n(x)e^{ax}$$

باشد، آنگاه: $y_p(x) = x^s Q_n(x)e^{ax}$: s تکرار a در ریشه شاخص

مثال: معادله دیفرانسیل $y'' - y = e^x$ را حل کنید.

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \Rightarrow s = 1 \\ r = -1 \end{cases}$$

$$y_p(x) = xAe^x = Axe^x \quad y'_p(x) = (Ax + A)e^x$$

$$y''_p(x) = (Ax + 2A)e^x \Rightarrow y''_p - y_p = e^x$$

بنابراین $y_p(x) = \frac{1}{2}xe^x$ جواب خصوصی است.

$$2Ae^x = e^x \rightarrow A = \frac{1}{2}$$

۳. اگر $r(x)$ حاصلضرب توابع چندجمله‌ای از درجه n و نمایی و مثلثاتی باشد، داریم:

$$r(x) = p_n(x)e^{\alpha x} \begin{cases} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{cases} \text{ یا } y_p(x) = x^s e^{\alpha x} (Q_n(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x)$$

s : تکرار $\alpha + \beta i$ در ریشه شاخص می‌باشد.

مثال: معادله دیفرانسیل $y'' + y = \sin x$ را حل کنید.

حل:

$$r^2 + 1 = 0 \rightarrow r = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} = \pm i$$

$$\alpha + \beta i = i \Rightarrow s = 1$$

با توجه به $r(x) \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$ داریم:

$$y_p(x) = x((A) \cos x + (B) \sin x)$$

$$y_p(x) = x(A \cos x + B \sin x)$$

$$y'_p(x) = A \cos x - Ax \sin x + Bx \cos x + B \sin x$$

$$y''_p(x) = -A \sin x - A \sin x - Ax \cos x + B \cos x + B \cos x - Bx \sin x$$

$$y''_p + y_p = \sin x \Rightarrow -2A \sin x + 2B \cos x = \sin x$$

$$-2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, 2B = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{2}x \cos x$$

جواب خصوصی معادله است $y_p(x) = -\frac{1}{2}x \cos x$

نکته

اگر سمت راست معادله $\sin \beta x$ یا $\cos \beta x$ باشد و ضریب y' صفر باشد و $Bi \notin \{\text{ریشه‌ها}\}$ ، آنگاه: $A \cos \beta x$ یا $y_p = A \sin \beta x$ را انتخاب می‌کنیم.

مثال: معادله دیفرانسیل $y'' + 4y = \cos x$ را حل کنید.

حل: $0 = \text{ضریب } y' \text{ و } \{ \text{ریشه‌ها} \} \neq 1$ ، بنابراین:

$$y_p = A \cos x$$

$$y_p'' = -A \cos x$$

$$y_p'' + 4y_p = \cos x \rightarrow 3A \cos x = \cos x \rightarrow A = \frac{1}{3}$$

بنابراین، جواب خصوصی معادله به صورت مقابل می‌باشد:

$$y_p = \frac{1}{3} \cos x$$

حال اگر $r(x)$ ، مجموع چند تا از $r(x)$ ها باشد (مجموع k تا از حالت‌های قبل باشد)

● اصل برهم نهی

قضیه

اگر $y'' + p(x)y' + q(x)y = r_1(x) + r_2(x) + \dots + r_k(x)$ و y_{p_1} جواب خصوصی پس:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r_1(x)$$

$$\text{آنگاه: } y_p(x) = y_{p_1} + y_{p_2} + \dots + y_{p_k}$$

مثال: جواب معادله $y'' - 3y' + 2y = xe^x + x^2 e^{2x}$ را بدست آورید.

$$r'' - 3r' + 2r = 0 \rightarrow \text{معادل شاخص} \quad , \quad r = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 2$$

$$y_{p_1}(x) = (Ax + B)xe^x = (Ax^2 + Bx)e^x$$

$$y_{p_1}'(x) = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x$$

$$y_{p_1}''(x) = 2Ae^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax^2 + Bx)e^x$$

$$y_{p_1}'' - 3y_{p_1}' + 2y_{p_1} = 2Ae^x - 2Axe^x - Be^x = xe^x$$

$$-2A = 1 \rightarrow A = -\frac{1}{2} \quad , \quad B = -1 \Rightarrow y_{p_1} = \left(-\frac{1}{2}x^2 - x \right) e^x$$

حال y_{p_r} را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y_{p_r}(x) &= x(Ax^r + Bx + c)e^{rx} = (Ax^r + Bx^r + cx)e^{rx} \\ y'_{p_r} &= (rAx^r + rBx + c)e^{rx} + re^{rx}(Ax^r + Bx^r + cx) \\ y''_{p_r} &= (rAx + rB)e^{rx} + re^{rx}(rAx^r + rBx + c) \\ &\quad + re^{rx}(Ax^r + Bx^r + cx) + (rAx^r + rBx + c)re^{rx} \\ \rightarrow y''_{p_r} - r y'_{p_r} + r y_{p_r} &= (rAx^r + rBx + c)e^{rx} + (rAx + rB)e^{rx} = x^r e^{rx} \end{aligned}$$

پس از دسته‌بندی، فاکتورگیری و ساده کردن:

$$rA = 1 \rightarrow A = \frac{1}{r}, rA + rB = 0 \rightarrow B = -1, rB + c = 0 \rightarrow c = r$$

$$\Rightarrow y_{p_r} = \left(\frac{1}{r} x^r - x^r + rx \right) e^{rx}$$

$$y_p = \left(-\frac{1}{r} x^r - x \right) e^x + \left(\frac{1}{r} x^r - x^r + rx \right) e^{rx} \quad \text{جواب خصوصی}$$

پس از روش اول، دومین روش برای محاسبه جواب خصوصی معادلات مرتبه دوم روش تغییر پارامتر است: در این روش $r(x)$ هر تابعی غیر از حالت‌های قبل می‌تواند باشد، با این شرط که جواب عمومی معادله همگن را داشته باشیم.

تذکر

برای معادله با ضرایب ثابت این دو جواب از معادله شاخص بدست می‌آید. همچنین اگر یک جواب داشته باشیم با استفاده از روش کاهش مرتبه، جواب مستقل دوم را می‌توانیم بدست آوریم.

● روش تغییر پارامتر

فرض کنیم جواب عمومی معادله همگن به صورت مقابل باشد: $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$
 آنگاه جواب خصوصی: $y_p = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$ در نظر می‌گیریم و u_1 و u_2 از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$u_1(x) = -\int \frac{r(x) y_2(x)}{\omega(y_1, y_2)} dx, \quad u_2(x) = \int \frac{r(x) y_1(x)}{\omega(y_1, y_2)} dx$$

با این شرط که u_1 و u_2 در شرط: $u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0$ صدق کنند.

مثال: اگر $y'' + y = \tan x$ یک معادله خطی مرتبه دوم باشد، جواب خصوصی آن را بدست آورید.

حل: چون $r(x) = \tan x$ ، از روش تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم:

$$\omega(\cos x \cdot \sin x) = 1$$

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y_p = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$$

$$u_1(x) = -\int \frac{\tan x \cdot \sin x}{1} dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} dx = \int (\cos x - \sec x) dx$$

$$= \int \cos x dx - \int \sec x dx = \sin x - \int \sec x dx = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$$

$$u_2(x) = \int \frac{\tan x \cdot \cos x}{1} dx = \int \sin x dx = -\cos x$$

$$y_p(x) = u_1 \cos x + u_2 \sin x = (\sin x - \ln|\sec x + \tan x|) \cos x + \sin x (-\cos x)$$

$$\Rightarrow y_p = -\cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

● معادله کوشی اوایلر

هر معادله دیفرانسیل خطی به صورت:

$$b_n x^n y^{(n)} + b_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_1 x y' + b_0 y = 0$$

که در آن $b, b_1, \dots, b_n$ اعداد ثابت هستند، به معادله کوشی وایلر یا هم بعد کوشی وایلر معروف است. برای مثال معادله وایلر مرتبه ۲ به فرم مقابل است:

$$x^2 y'' + ax y' + by = r(x)$$

که برای حل آن با استفاده از تغییر متغیر $x = e^u$ و $u = \ln x$ روی بازه $(0, \infty)$ به معادله مرتبه ۲ با ضرایب ثابت زیر تبدیل می‌شود:

$$y''(u) + (a-1)y'(u) + by(u) = r(e^u)$$

مثال: معادله $x^2 y'' + 3xy' + y = \ln x$ را حل کنید.

حل:

معادله فوق یک معادله وایلر است. بنابراین با تغییر متغیر $|x| = e^u$ به معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود:

$$y'' + 2y' + y = u$$

چون معادله شاخص $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$ دارای ریشه تکراری $r = -1$ می‌باشد،
لذا جواب قسمت همگن معادله برابر است با:

$$y_h(u) = c_1 e^{-u} + c_2 u e^{-u}$$

$$\omega(e^{-u}, u e^{-u}) = e^{-2u}$$

$$u_1 = - \int \frac{u \cdot u e^{-u}}{e^{-2u}} du = - \int u^2 e^u du = - [u^2 e^u - 2u e^u + 2e^u]$$

$$u_2 = \int \frac{u e^{-u}}{e^{-2u}} du = \int u e^u du = u e^u - e^u$$

$$y_p = -e^{-u} [u^2 e^u - 2u e^u + 2e^u] + u e^{-u} (u e^u - e^u) = -[u^2 - 2u + 2] + u^2 - u = u - 2$$

$$\rightarrow y = y_h + y_p = c_1 e^{-u} + c_2 u e^{-u} + u - 2 = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x} \ln x + \ln x - 2$$

برای معادلات مرتبه سوم اوایلر داریم:

$$x^2 y''' + a x^2 y'' + b x y' + c y = r(x)$$

که معادله با ضرایب ثابت آن به فرم زیر است:

$$y''' + (a-2)y'' + (2+b-a)y' + cy = r(e^u)$$

مثال: مطلوب است حل معادله $x^2 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^2$.

حل:

برای $x > 0$ با تغییر متغیر $u = \ln x$ داریم:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2(e^u)$$

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0 \Rightarrow r^2(r-2) - (r-2) = 0$$

$$(r-2)(r^2-1) = 0 \Rightarrow r = 1, -1, 2$$

نکته ۱

اگر در معادلات درجه سوم، مجموع ضرایب صفر باشد یکی از ریشه‌ها یک است.

نکته ۲

اگر در معادلات درجه سوم، مجموع ضرایب با درجه فرد برابر مجموع ضرایب با درجه زوج برابر باشد یکی از ریشه‌ها ۱- است.

پس داریم:

$$y_h(u) = c_1 e^u + c_2 e^{-u} + c_3 e^{\sqrt{u}} \Rightarrow y_h(x) = c_1 x + c_2 x^{-1} + c_3 x^{\frac{1}{4}}$$

و برای محاسبه جواب خصوصی:

$$y_p(u) = A e^{\sqrt{u}} \Rightarrow A = \frac{1}{15} \Rightarrow y_p(u) = \frac{1}{15} e^{\sqrt{u}}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{15} x^{\frac{1}{4}}$$

بنابراین با توجه به مشتق تابع لگاریتم در حالت کلی می‌توانستیم $u = \ln|x|$ در نظر بگیریم. پس جواب عمومی معادله به صورت زیر می‌باشد.

$$y = c_1 |x| + c_2 |x|^{-1} + c_3 |x|^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{15} |x|^{\frac{1}{4}}$$

تذکر

در معادلات اویلر مرتبه سوم، معادله شاخص به صورت زیر است:

$$r(r-1)(r-2) + ar(r-1) + br + c = 0$$

فصل سوم

حل معادلات دیفرانسیل با سری‌های توانی

سری‌های توانی یکی از ابزارهای مهم برای حل رده‌ای خاص از معادلات دیفرانسیل هستند.

سری‌های توانی در حالت کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند:
۱. سری تیلور و ۲. سری مک لورن

۱. سری تیلور: سری توانی بصورت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0)^1 + \dots + a_n (x-x_0)^n + \dots$$

به سری تیلور معروف است که در آن:

(۱) $a_0, a_1, a_2, \dots, x_0$ اعداد ثابت هستند،

(۲) x_0 یک متغیر است،

(۳) x_0 مرکز بسط می‌باشد،

(۴) a_i ها هم ضرایب هستند.

با تغییر متغیر $p = x - x_0$ سری تیلور به شکل زیر در می‌آید که به سری مک لورن معروف است (مرکز بسط در سری مک لورن صفر است)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$$

● **تعریف:** R را شعاع همگرایی سری و فاصله $(-R, R)$ یا $(x - R, x + R)$ را بازه همگرایی سری می‌گوییم اگر:

۱. عددی مانند $R \geq 0$ موجود باشد، به طوری که به ازای هر $p \in (-R, R)$ سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$$

همگرا باشد.

۲. عددی مانند $R \geq 0$ موجود باشد، به طوری که به ازای هر $x \in (x - R, x + R)$ سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

همگرا باشد.

نکته

برای پیدا کردن شعاع همگرایی سری از دو رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$(1) \text{ آزمون نسبت یا دالامبر: } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$(2) \text{ آزمون ریشه: } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

● نقاط عادی و نقاط تکین

همانطور که در قسمت قبلی برخی تعاریف اولیه بررسی شد، برای حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری‌ها نیاز به آشنایی با برخی اصطلاحات جدید داریم:

● تعریف

تابع $f(x)$ را در نقطه x تحلیلی گویند، هرگاه f در یک همسایگی دلخواه x بی‌نهایت بار مشتق پذیر باشد.

تابع $f(x)$ را روی بازه I تحلیلی گویند، هرگاه f در هر نقطه I تحلیلی باشد. به عبارت دیگر، تابع $f(x)$ را در نقطه x تحلیلی می‌گوییم:

اگر تابع $f(x)$ را بتوان در نقطه x بصورت توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ نوشت طوری که برای $x \in (-R, R)$ سری فوق به $f(x)$ همگرا باشد؛ پس اگر:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$a_n = f(x) \cdot a_1 = f'(x) \cdot a_2 = \frac{f''(x)}{2!} \dots a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

پس بنا به قضیه قبل، سری توانی فوق را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x-x)^n$$

مثال: سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ به ازای هر x به e^x همگراست، پس $f(x) = e^x$ در هر نقطه تحلیلی است.

نکته

۱. توابعی که در هر نقطه از اعداد حقیقی تحلیلی هستند.
۲. جمع و تفریق یا ضرب دو تابع تحلیلی، تحلیلی است.
۳. تقسیم دو تابع تحلیلی برهم، تحلیلی است به جز در صفرهای مخرج کسر.

● تعریف نقطه عادی (معمولی یا منفرد)

معادله دیفرانسیل $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = f(x)$ را در نظر بگیرید، اگر توابع P, Q, R روی بازه I تعریف شده و در نقطه $x \in I$ تحلیلی باشند، آنگاه:

(الف) اگر $p(x) \neq 0$ نقطه x را برای معادله نقطه عادی می‌نامند.

(ب) اگر $p(x) = 0$ و $|Q(x)| + |R(x)| + |f(x)| \neq 0$ نقطه x را برای معادله نقطه غیر عادی (تکین یا منفرد) گویند.

نکته

اگر توابع P, Q, R چند جمله‌ای باشد، قسمت (الف) و (ب) برای ریشه‌های P بررسی می‌شوند.

مثال: نقاط ۰، ۱، ۲ برای معادله زیر تکین و سایر نقاط عادی هستند (ریشه‌های ضریب y'')

$$x(x^2 - 3x + 2)y'' - x^2y + (2x + 1)y = 0$$

مثال: نقاط $x = k\pi$ و $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ برای معادله زیر غیر عادی و سایر نقاط عادی هستند.

$$(\sin x)y'' + (\tan x)y' + e^x y = 0$$

(توجه داشته باشید در مثال بالا ضرایب y'' و y' مثلثاتی هستند پس باید علاوه بر صفرهای ضرایب y'' ، در نقاطی که ضرایب y' به بی‌نهایت میل می‌کند (تعریف نشده است) نیز تعیین شود)

مثال: در معادله $xy'' + y' - 2x^2y = 0$ نقطه $x = 0$ نقطه غیر عادی معادله است. زیرا تابع $Q(x) = \frac{1}{x}$ در صفر تحلیلی نیست و نقاط دیگر، نقاط عادی معادله هستند.

$(Q(x))$ از تقسیم همه ضرایب بر ضریب y'' بدست آمده است

● تعریف نقطه غیر عادی منظم

x . را نقطه غیر عادی منظم معادله $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = f(x)$ می‌گوییم، هرگاه:

۱. نقطه x . یک نقطه غیر عادی معادله دیفرانسیل فوق باشد.
۲. توابع $(x-x_0)^2 \frac{R(x)}{p(x)}$ و $(x-x_0) \frac{Q(x)}{p(x)}$ در نقطه x . تحلیلی باشند. در غیر اینصورت x . را غیر عادی یا تکین نامنظم می‌نامند.

مثال: در معادله دیفرانسیل $xy'' + y' - 2x^2y = 0$ نقطه $x = 0$ نقطه غیر عادی منظم معادله است، زیرا $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ ، $x^2 \cdot \left(-\frac{2x^2}{x}\right) = -2x^2$ در صفر تحلیلی است.

مثال: نقاط منفرد منظم معادله دیفرانسیل $(x-1)y'' + \frac{1}{x}y' - 2y = 0$ را پیدا کنید.

$$y'' + \frac{1}{x(x-1)}y' - \frac{2}{x-1}y = 0 \Rightarrow \text{نقاط منفرد } x=0, x=1$$

$$x_0 = 0 \begin{cases} (x-x_0) \frac{Q(x)}{p(x)} = x \cdot \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} \\ (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{p(x)} = x^2 \cdot \frac{-2}{(x-1)} = \frac{-2x^2}{x-1} \end{cases} \Rightarrow \text{در } x \text{ تحلیلی هستند}$$

$$x_0 = 1 \begin{cases} (x-1) \cdot \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x} \\ (x-1)^2 \cdot \frac{-2}{(x-1)} = -2(x-1) \end{cases} \Rightarrow \text{در } x \text{ تحلیلی هستند}$$

تذکر

توابع $(x-x_0)^r \frac{R(x)}{p(x)}$ و $(x-x_0)^r \frac{Q(x)}{p(x)}$ تحلیلی هستند، اگر و تنها اگر دو حد زیر موجود و متناهی باشند:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^r \frac{Q(x)}{p(x)} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^r \frac{R(x)}{p(x)}$$

● حل معادله حول نقاط عادی

ابتدا قضیه صفحه بعد را بررسی می‌کنیم.

قضیه

اگر x_0 یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل $p(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = f(x)$ باشد، در اینصورت معادله دیفرانسیل فوق دارای جوابی به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 y_1 + a_1 y_2$ حول نقطه x_0 می‌باشد که $a_n = \frac{f(x_0)}{n!}$ است.

راه حل:

۱. بدست آوردن جواب معادله از قضیه فوق، ۲. مشتق‌گیری از جواب و جایگذاری در معادله، ۳. هم توان و هم شروع کردن جملات، ۴. فاکتورگیری و دسته‌بندی، ۵. ضرایب نظیر به نظیر دو طرف معادله را برابر قرار می‌دهیم تا ضرایب معمول a_n بدست آیند.

نکته

در هم توان و هم شروع کردن سیگماها، هم توان کردن الویت بیشتری دارد و بعد از هم توان شدن در صورت نیاز سیگماها را هم شروع می‌کنیم.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - xy = 0$ را در مجاورت $x_0 = 0$ بیابید. (معادله فوق را معادله آیدی گویند)

حل: توابع $p(x)=1$ ، $R(x)=-x$ ، $Q(x)=0$ و $f(x)=0$ در صفر تحلیلی هستند پس

$x_0 = 0$ نقطه عادی معادله دیفرانسیل است. لذا معادله دارای جوابی به فرم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ است.

برای بدست آوردن ضرایب a_n داریم:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله: $y'' - xy = 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

☑ (یادآوری: دو سیگما زمانی قابل جمع و تفریق هستند که:

۱. توان x ها برابر، ۲. حدود سیگماها مثل هم باشد).

سپس توان‌ها را با تغییر متغیر n به $n+3$ در سری اول، یکی می‌کنیم:

$$\Rightarrow \sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

اندیس‌ها را یکی می‌کنیم:

$$\Rightarrow 2a_3 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow 2a_3 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+3)(n+2) a_{n+3} - a_n] x^{n+1} = 0$$

$$(n=0, 1, 2, \dots) \Rightarrow \begin{cases} 2a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \\ [(n+3)(n+2) a_{n+3} - a_n = 0 \Rightarrow a_{n+3} = \frac{1}{(n+3)(n+2)} a_n \end{cases}$$

(که a_{n+3} یک دنباله بازگشتی از ضرایب a_n است)

حال چون به ازای $a_3 = 0$ و با استفاده از رابطه بازگشتی $a_3 = a_6 = a_9 = \dots = 0$ و بقیه

ضرایب به صورت زیر است:

$$n=1 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} a_1, \quad n=0 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6} a_0$$

$$n=4 \Rightarrow a_7 = \frac{1}{4 \cdot 3} a_4 = \frac{1}{12 \cdot 4 \cdot 3} a_1, \quad n=3 \Rightarrow a_6 = \frac{1}{3 \cdot 2} a_3 = \frac{1}{6 \cdot 3 \cdot 2} a_0$$

$$n=7 \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} a_1, \quad n=6 \Rightarrow a_9 = \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a_0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_3 x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{6} a_0 x^3 + \frac{1}{12} a_1 x^4 + \frac{1}{180} a_0 x^6 + \frac{1}{12 \cdot 4 \cdot 3} a_1 x^7 + \frac{1}{72 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} a_0 x^9 + \dots$$

پس جواب عمومی معادله:

$$\Rightarrow y = a_1 y_1 + a_0 y_2$$

$$y = a_1 \left(1 + \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{180} x^4 + \frac{1}{72 \times 180} x^6 + \dots \right) + a_0 \left(x + \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{12 \times 42} x^5 + \dots \right)$$

مثال: جواب معادله دیفرانسیل $y'' + (x-1)y' + y = e^x$ با شرایط $y'(0)=1, y(0)=0$ را بیابید.

حل: توابع $p(x)=1$, $Q(x)=(x-1)$, $R(x)=1$, $f(x)=e^x$ که در صفر تحلیلی هستند پس $x=0$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل است.

برای بدست آوردن ضرایب a_n داریم:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

حال با جایگذاری در معادله:

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + (x-1) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = e^x$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = e^x$$

توان‌ها و اندیس‌ها را یکی کرده و بسط مک لورن e^x را جایگذاری می‌کنیم.

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n - (n+1) a_{n+1} + a_n] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n - (n+1) a_{n+1} + a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1) a_{n+2} = (n+1) a_{n+1} - (n+1) a_n + \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{(n+1)(a_{n+1} - a_n)}{(n+2)(n+1)} + \frac{\frac{1}{n!}}{(n+2)(n+1)}$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{(a_{n+1} - a_n)}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)!}$$

استفاده از شرایط داده شده داریم:

$$\begin{cases} y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \Rightarrow 0 = y(0) = a_0 + 0 + 0 + \dots \Rightarrow a_0 = 0 \\ y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \Rightarrow 1 = y'(0) = a_1 + 0 + 0 + \dots \Rightarrow a_1 = 1 \end{cases}$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_2 - a_2}{2} + \frac{1}{2!} = \frac{-1}{2} \quad , \quad n=0 \Rightarrow a_0 = \frac{a_1 - a_1}{1} + \frac{1}{1!} = 1$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{a_3 - a_3}{3} + \frac{1}{3!} = \frac{-1}{6} \quad , \quad n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{a_2 - a_1}{2} + \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

پس جواب معادله:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$y = x + x^2 + \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{24} x^5 + \dots$$

با استفاده از دو مثال قبل تمرین زیر را حل کنید.

تمرین: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x^2 - 1)y'' + x^2 y' - xy = x^2 + 1$ را در مجاورت $x = 0$ بیابید.

● حل معادله حول نقاط تکین منظم

در بخش می‌خواهیم معادلات دیفرانسیل را به کمک سری‌های توانی حل کنیم که حول نقاط غیر عادی منظم هستند.

● حل معادله به روش فروبینیوس، حول نقاط تکین منظم

هر سری بصورت $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یا $y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ را یک سری فروبینیوس گویند.

قضیه

اگر x_0 یک نقطه غیر عادی منظم معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد، معادله دیفرانسیل دارای جواب (خصوصی) به صورت سری فروبینیوس است.

می‌توان نتیجه گرفت، اگر توابع $p(x)$ و $q(x)$ در نقطه x تحلیلی باشند، با توجه به قضیه فوق معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ دارای جوابی

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r} \text{ می‌باشد و } y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n (x-x_0)^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n (x-x_0)^{n+r-2}$$
 معادله $r(r-1) + p.r + q = 0$ را معادله مفسر

یا شاخص برای معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ می‌گوییم که:

$$\begin{cases} p = \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) p(x) \\ q = \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^2 q(x) \end{cases}$$

اگر r_1 و r_2 ریشه‌های معادله مشخصه باشند، بطوری که $(r_1 > r_2)$ آنگاه معادله دیفرانسیل دارای دو جواب مستقل خطی y_1 و y_2 است که از قضیه بعدی دست می‌آید.

قضیه

اگر نقطه x_0 نقطه غیر عادی منظم معادله باشد، جواب اول معادله سری فروبینیوس

$$y_1 = (x-x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$
 است و جواب دوم از حالت‌های زیر بدست می‌آید:

$$y_2 = (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \text{ آنگاه } r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z} \text{ باشد،}$$

$$\text{حالت دوم: اگر } r_1 = r_2 \text{ باشند، آنگاه: } y_2 = y_1(x) \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

در هر حالت جواب عمومی معادله دیفرانسیل می‌باشد.

مثال: فرم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $4xy'' + 6y' + y = 0$ را در نقطه صفر بیابید.

$$y'' + \frac{3}{2x} y' + \frac{1}{4x} y = 0$$

$$\text{صفر نقطه غیر عادی معادله است و } x \cdot \frac{3}{2x} = \frac{3}{2} \text{ و } x \cdot \frac{1}{4x} = \frac{1}{4}$$

هستند، پس $x = 0$ نقطه غیر عادی منظم معادله دیفرانسیل است.

تشکیل معادله مشخصه به صورت زیر:

$$\Rightarrow r(r-1) + p.r + q = 0 \Rightarrow r(r-1) + \frac{3}{2}r = 0 \Rightarrow r^2 + \frac{1}{2}r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -\frac{1}{2}$$

چون $r_1 - r_2 = \frac{1}{2}$ پس: $y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ بنابراین

جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است: $y = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + c_2 x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

مثال: فرم جواب عمومی معادله دیفرانسیل $2x^2 y'' + x(2x-1)y' + y = 0$ را در نقطه صفر بیابید.

حل: ابتدا استاندارد می کنیم:

$$y'' + \frac{2x-1}{2x} y' + \frac{1}{2x^2} y = 0.$$

صفر نقطه غیر عادی است و $x \cdot \frac{2x-1}{2x} = \frac{2x-1}{2}$ و $x^2 \cdot \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$ در صفر تحلیلی هستند، پس $x = 0$ نقطه غیر عادی منظم معادله دیفرانسیل است.

پس معادله شاخص را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$\Rightarrow r(r-1) + p.r + q. = 0 \Rightarrow r(r-1) + \left(-\frac{1}{2}\right)r + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{2}$$

چون $r_1 - r_2 = \frac{1}{2}$ پس: $y_1(x) = x^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y_2(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

عمومی معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$y = c_1 x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + c_2 x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

● نقطه در بی نهایت

جواب های سری توانی یک معادله دیفرانسیل که تاکنون مورد بررسی قرار دادیم در بازه ای به حول نقطه $x = x_0$ بوده است.

رفتار جواب های معادله دیفرانسیل به صورت:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ \left[\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \right] \end{cases}$$

وقتی متغیر مستقل x بی نهایت می شود را بررسی می کنیم.

توجه: ضریب y'' باید یک باشد.

حل: با تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ داریم: $y(x) = y\left(\frac{1}{t}\right)$ و از قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d^r y}{dt^r} + \frac{p(t) dy}{dt} + q(t)y = 0 \\ y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \end{cases}$$

که در آن: $p(t) = \frac{r}{t} - \frac{1}{t^r} p\left(\frac{1}{t}\right)$ و $q(t) = \frac{1}{t^r} \cdot q\left(\frac{1}{t}\right)$ است.

مثال: در معادلهٔ زیر تعیین کنید، بی‌نهایت یک نقطهٔ معمولی است یا یک نقطهٔ منفرد منظم.

$$x^r (x-1)y'' + (x-1)y' + 4xy = 0.$$

حل: ابتدا ضریب y'' را یک می‌کنیم.

$$\Rightarrow y'' + \frac{1}{x^r} y' + \frac{4}{x^r(x-1)} y = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(x) = \frac{1}{x^r} \Rightarrow p\left(\frac{1}{t}\right) = t^r \\ q(x) = \frac{4}{x^r(x-1)} \Rightarrow q\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{4}{\frac{1}{t^r}\left(\frac{1}{t}-1\right)} = \frac{4t^r}{1-t} \end{cases}$$

پس معادله به صورت زیر شکل می‌گیرد:

$$p\left(\frac{1}{t}\right) = t^r, \quad q\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{4t^r}{1-t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^r y}{dt^r} + \left[\frac{r}{t} - \frac{p\left(\frac{1}{t}\right)}{t^r} \right] \frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^r} q\left(\frac{1}{t}\right) y = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{d^r y}{dt^r} + \left[\frac{r}{t} - \frac{t^r}{t^r} \right] \frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^r} \left[\frac{4t^r}{1-t} \right] y = 0.$$

$$\Rightarrow y'' + \left(\frac{r-t^r}{t} \right) y' + \frac{4}{t(1-t)} y = 0.$$

ضریب y' را $p(t)$ و ضریب y را $q(t)$ می‌نامیم)، $t = 0$ نقطه عادی غیر عادی در $q(t)$ و $p(t)$ است. در $t = 0$ تحلیلی است در نتیجه $t = 0$ غیر عادی منظم است. لذا نقطه در بی‌نهایت منفرد منظم است.

مثال: جواب عمومی معادله زیر را برای x های بزرگ مثبت بدست آورید.

$$x^r y'' + x(1 + 2x^r) y' + 5y = 0.$$

حل:

ابتدا ضریب y'' را یک می‌کنیم:

$$\Rightarrow y'' + \frac{1+2x^r}{x^r} y' + \frac{5}{x^r} y = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(x) = \frac{1+2x^r}{x^r} \Rightarrow p\left(\frac{1}{t}\right) = t(t^r + 2) \\ q(x) = \frac{5}{x^r} \Rightarrow q\left(\frac{1}{t}\right) = 5t^r \end{cases}$$

پس معادله به شکل زیر شکل می‌گیرد:

$$p\left(\frac{1}{t}\right) = t(t^r + 2), \quad q\left(\frac{1}{t}\right) = 5t^r$$

$$\Rightarrow \frac{d^r y}{dt^r} + \left[\frac{r}{t} - \frac{p\left(\frac{1}{t}\right)}{t^r} \right] \frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^r} q\left(\frac{1}{t}\right) y = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{d^r y}{dt^r} - t \frac{dy}{dt} + 5y = 0 \Rightarrow y'' - ty' + 5y = 0.$$

$t = 0$ نقطه عادی است، لذا جواب به صورت $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ می‌باشد، مشتق می‌گیریم:

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \Rightarrow y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} 5 a_k t^k = 0.$$

در سری اول k را به $k+۲$ تبدیل می‌کنیم.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+۲)(k+۱)a_{k+۲}t^k - \sum_{k=-\infty}^{\infty} ka_kt^k + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta a_kt^k = 0.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} [(k+۲)(k+۱)a_{k+۲} - ka_k + \Delta a_k]t^k = 0 \Rightarrow a_{k+۲} = \frac{k-\Delta}{(k+۲)(k+۱)}a_k$$

سپس به ازای:

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 0 \rightarrow a_۲ = -\frac{\Delta}{۲}a_0 \\ k = ۱ \rightarrow a_۳ = -\frac{۲}{۳}a_۱ \\ k = ۲ \rightarrow a_۴ = \frac{\Delta}{۸}a_۰ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow y(t) = a_0 + a_1t - \frac{\Delta}{۲}a_0t^۲ - \frac{۲}{۳}a_1t^۳ + \frac{\Delta}{۸}a_0t^۴ + \dots$$

با جایگذاری $x = \frac{1}{t}$ و $t = \frac{1}{x}$ داریم:

$$y(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} - \frac{\Delta}{۲x^۲}a_0 - \frac{۲}{۳x^۳}a_1 + \frac{\Delta}{۸x^۴}a_0 + \dots$$

● توابع خاص

در این بخش توابع خاص را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در حل معادلات کاربردهایی دارند. این توابع عبارتند از: تابع گاما و تابع بسل که به معرفی آن‌ها می‌پردازیم.

● تعریف تابع گاما

تابع گاما برای اعداد حقیقی مثبت بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$$

این انتگرال برای مقادیر مثبت x همگراست.

ویژگی اول:

برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

اثبات: با توجه به تعریف تابع گاما داریم:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^{x+1-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$$

با استفاده از روش جزء به جزء و انتخاب:

$$\begin{cases} t^x = u \Rightarrow du = x t^{x-1} dt \\ e^{-t} dt = dv \Rightarrow v = -e^{-t} \end{cases}$$

داریم:

$$\Gamma(x+1) = \left(-t^x e^{-t} \right) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-t} x t^{x-1} dt = 0 + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x)$$

مثال: با استفاده از تابع گاما داریم:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

سپس با توجه به نکته فوق و $\Gamma(1) = 1$ می‌توان مقادیر تابع گاما را برای اعداد طبیعی

به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 \Gamma(2) = 2 \times 1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3 \Gamma(3) = 3 \times 2! = 3!$$

$\vdots$

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

به همین ترتیب برای هر عدد حقیقی مثبت داریم:

ویژگی دوم:

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) = x(x-1) \Gamma(x-1) = x(x-1)(x-2) \dots = x!$$

مثال: مقدار $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ را محاسبه کنید.

حل: با توجه به تعریف تابع گاما داریم:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

$$\begin{cases} \Rightarrow t^{\frac{1}{2}} = u \Rightarrow t = u^2 \Rightarrow dt = 2u du \\ \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases}$$

با تغییر متغیر داریم:

$$(۱) \Rightarrow \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} (2u du) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u} du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

پس $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ است این مقدار را به خاطر بسپارید. با استفاده از نکته قبل می توان

نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)! &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \left(\frac{3}{2}\right)! &= \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \end{aligned}$$

ویژگی سوم:

با توجه به اینکه برای $x \neq 0$ داریم: $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ پس $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ لذا می توان مقدار تابع گاما را برای $x = 0^+$ و مقادیر منفی محاسبه کرد. به عبارت دیگر تابع گاما روی تمام اعداد حقیقی به غیر از اعداد صحیح منفی و صفر تعریف می شود

لذا: $x \neq -1, -2, -3, \dots$, $x! = \Gamma(x+1)$

مثال: مقدار $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \frac{\Gamma(x+1)}{x} \\ \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = -2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \\ \Rightarrow \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) &= -\frac{2}{3} \times (-2) \sqrt{\pi} = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

یکی دیگر از خواص تابع گاما، محاسبه انتگرال هایی است که در درس های گذشته با استفاده از تکنیک های انتگرال گیری قابل حل نبودند، در این قسمت مثالی ارائه می کنیم که می توان با استفاده از خواص تابع گاما برخی از این نوع انتگرال ها را حل کرد.

مثال: با استفاده از خواص تابع گاما انتگرال زیر را حل کنید.

$$I = \int_1^{\frac{\Delta}{\gamma}} x^{\frac{\Delta}{\gamma}} (Lnx)^{\gamma} dx$$

با تغییر متغیر زیر: (عبارت‌ها را به فرم گاما تبدیل خواهد کرد)

$$\begin{cases} Lnx = -t \\ x = e^{-t} \\ dx = -e^{-t} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=0 \Rightarrow t=+\infty \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\Delta}{\gamma}} (e^{-t})^{\frac{\Delta}{\gamma}} (-t)^{\gamma} (-e^{-t}) dt = \int_0^{\frac{\Delta}{\gamma}} e^{-\frac{\Delta}{\gamma}t} t^{\gamma} dt$$

$$\begin{cases} \frac{\Delta}{\gamma}t = u \\ \frac{\Delta}{\gamma}dt = du \end{cases} \Rightarrow \int_0^{\frac{\Delta}{\gamma}} e^{-u} \left(\frac{\gamma}{\Delta}u\right)^{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\Delta} du = \left(\frac{\gamma}{\Delta}\right)^{\gamma} \int_0^{\frac{\Delta}{\gamma}} e^{-u} u^{\gamma} du = \left(\frac{\gamma}{\Delta}\right)^{\gamma} \cdot \Gamma(\gamma) = \left(\frac{\gamma}{\Delta}\right)^{\gamma} \cdot \gamma! = \frac{16}{\gamma^{\gamma}}$$

یکی دیگر از توابع خاص، تابع بسمل است، برای تعریف تابع بسمل ابتدا نیاز است با معادله دیفرانسیل بسمل و جواب‌های آن آشنا شویم.

● معادله دیفرانسیل بسمل

هر معادله دیفرانسیل به فرم $x^{\gamma}y'' + xy' + (x^{\gamma} - p^{\gamma})y = 0$ ($p \geq 0$) را یک معادله بسمل مرتبه p (که p یک ثابت است) می‌نامند. در معادله دیفرانسیل بسمل، نقطه صفر، نقطه غیر عادی منظم معادله است. لذا با تشکیل معادله مشخصه داریم:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{(x^{\gamma} - p^{\gamma})}{x^{\gamma}}y = 0 \Rightarrow \begin{cases} p. = \lim_{x \rightarrow 0} xp(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x} = 1 \\ q. = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\gamma}q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{\gamma} \cdot \frac{(x^{\gamma} - p^{\gamma})}{x^{\gamma}} \right) = -p^{\gamma} \end{cases}$$

$$\Rightarrow r(r-1) + r - p^{\gamma} = 0 \Rightarrow r^{\gamma} - p^{\gamma} = 0 \Rightarrow r = \pm p$$

پس $y_1(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب اول معادله بسمل است و برای جواب دوم با توجه به

اینکه $r_1 - r_{\gamma} = p - (-p) = 2p$ است، سه حالت داریم:

حالت اول: اگر $r_1 - r_{\gamma} = 2p \notin \mathbb{Z}$ آنگاه $r_1 - r_{\gamma} = 2p$ می‌باشد.

حالت دوم: اگر $r_1 = r_r = P = 0$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ $y_r(x) = y_1(x) Lnx + x \cdot$ می‌باشد.

حالت سوم: اگر $r_1 - r_r = 2P \in \mathbb{Z}$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ $y_r(x) = cy_1(x) Lnx + x^{-P}$ می‌باشد.

اکنون برای مشخص کردن ضرایب a_n در $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+P}$ داریم: که پس از مشتق‌گیری و جایگذاری، دنباله بازگشتی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$n = 2, 3, \dots, \quad a_1 = 0, a_n = \frac{-1}{n(2p+n)} a_{n-2}$$

چون $a_1 = 0$ است، پس $a_r = a_{\delta} = a_v = \dots = a_{r+n+1} = 0$ برای اندیس‌های زوج داریم:

$$a_n = \frac{-1}{n(2p+n)} a_{n-2}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2 \times 2(p+1)}$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{(-1)^2 a_0}{2^2 \times 2!(p+1)(p+2)}$$

.

.

.

$$a_{2n} \Rightarrow \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$$

پس جواب اول معادله بسل به صورت زیر است:

$$y_1(x) = a_0 x^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$$

● تابع بسل نوع اول از مرتبه P

در y_1 اگر $a_0 = \frac{1}{2^p \cdot p!}$ انتخاب کنیم، در اینصورت جواب اول معادله بسل به صورت:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

می‌باشد که آن را تابع بسل نوع اول از مرتبه p می‌نامیم.

حال جواب دیگر معادله بسل را به ازای $r = -p$ بدست می‌آوریم:

$$y_r(x) = x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-p}$$

با جایگذاری آن در معادله بسل به روابط زیر می‌رسیم:

$$a_1(1-2p) = 0, \quad a_n = \frac{1}{n(n-2p)} a_{n-2} \quad (\forall n=2,3,\dots)$$

دو حالت زیر رخ می‌دهد:

حالت اول:

اگر $2p \neq 1$ و در نتیجه $1-2p \neq 0$,

پس از دو رابطه بالا داریم:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2k+1} = 0$$

و مانند حالت قبلی جواب دوم به صورت زیر است:

$$y_r(x) = a x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n! (-p+1)(-p+2)\dots(-p+n)}$$

با انتخاب $a = \frac{1}{2^{-p}(-p)!}$ جواب دوم به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

(دانشجویان عزیز توجه داشته باشید در تمام حالت‌های مختلف این بخش، فقط نتایج اهمیت امتحانی و

کنکوری دارد و بررسی جزئیات و اثبات این حالت‌ها صرفاً برای دانشجویان علاقمند می‌باشد.)

حالت دوم:

حال اگر p صحیح نباشد، ولی $2p$ صحیح باشد، در این صورت $2p$ فرد است.

۱. اگر $2p = 1$ باشد، در این صورت از رابطه $a_1(1-2p) = 0$ نتیجه می‌گیریم a_1 می‌تواند صفر

نباشد، اما چون به دنبال جوابی از معادله هستیم، آن را صفر انتخاب می‌کنیم و در نتیجه از

رابطه $a_n = \frac{-1}{n(n-2p)} a_{n-2}$ اندیس‌های فرد صفر است و همان جواب $J_{-p}(x)$ بدست

می‌آید.

۲. اگر $p > 1$ باشد، به ازای $n = 2p$ ضریب a_{2p} از رابطه: $a_n = \frac{-1}{n(n-2p)} a_{n-2}$ ، صفر بدست می‌آید و می‌توان a_{2p} را بطور دلخواه در نظر گرفت. اگر $a_{2p} = 0$ باشد دوباره اندیس‌های فرد، صفر هستند و باز همان جواب $J_{-p}(x)$ بدست می‌آید.

نکته

اگر در معادله دیفرانسیل بسل P عددی صحیح نباشد، آنگاه $J_p(x)$ ، $J_{-p}(x)$ دو جواب مستقل خطی بسل هستند، جواب عمومی معادله دیفرانسیل بسل به صورت زیر می‌باشد:

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$$

و اگر $p \in \mathbb{Z}^+$ باشند، $J_p(x)$ و $J_{-p}(x)$ مستقل خطی نیستند و جواب دوم، مانند حالت دوم و سوم است که ضرایب b_n را باید محاسبه کرد.

● تابع بسل

هر جواب معادله دیفرانسیل بسل را که با $J_p(x)$ مستقل خطی باشد، تابع بسل نوع دوم از مرتبه P گوییم و با $y_p(x)$ نشان داده می‌شود. پس جواب عمومی معادله بسل به فرم $y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$ است.

پس از بحث‌های بالا جواب معادله بسل به صورت زیر است:

$$\begin{cases} p \notin \mathbb{Z} \Rightarrow y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x) \\ p \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = c_1 J_p(x) + c_2 J_p(x) \end{cases}$$

● حالات خاص

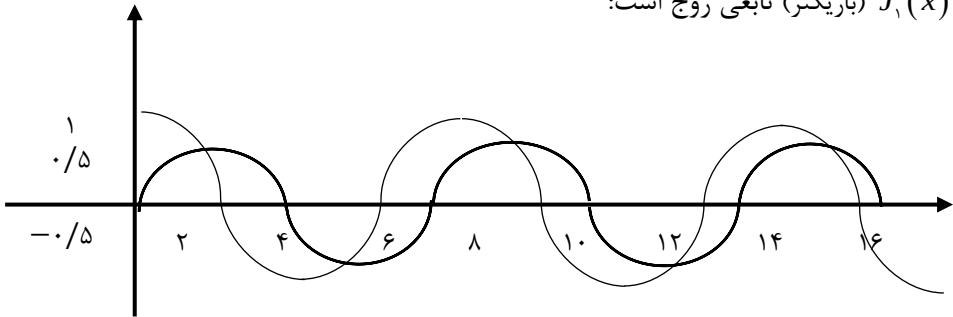
به ازای $p = 0$ تابع بسل مرتبه صفر به صورت زیر است.

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{36} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

و به ازای $p = 1$ تابع بسل مرتبه یک به صورت زیر است:

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{12} \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \dots$$

این منحنی شباهت زیادی به توابع $\sin x$ و $\cos x$ دارند، $J_1(x)$ (تیره‌تر) تابعی فرد و $J_0(x)$ (باریکتر) تابعی زوج است:



مثال: معادله دیفرانسیل بسل $xy'' + y' + xy = 0$ را حل کنید.

حل: معادله فوق به صورت $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$ بوده که در آن $p = 0$ است پس جواب اول معادله بسل همان تابع بسل نوع اول مرتبه صفر است.

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{36} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

چون p صحیح است، جواب دوم $y_2(x)$ است، که برای بدست آوردن آن از رابطه $J_2(x) = u(x) J_1(x)$ استفاده می‌کنیم، که:

$$u = \int \frac{1}{J_1(x)} e^{\int -p(x) dx} dx = \int \frac{1}{J_1(x)} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx$$

$$u = \int \frac{1}{J_1(x)} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx = \int \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{32} x^4 + \dots \right) dx = \ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5}{128} x^4 + \dots$$

و جواب دوم معادله بسل $J_2(x) = u(x) J_1(x) = J_1(x) \left(\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5}{128} x^4 + \dots \right)$ است و

جواب معادله $y = c_1 J_0(x) + c_2 y_2(x)$ است.

نکات

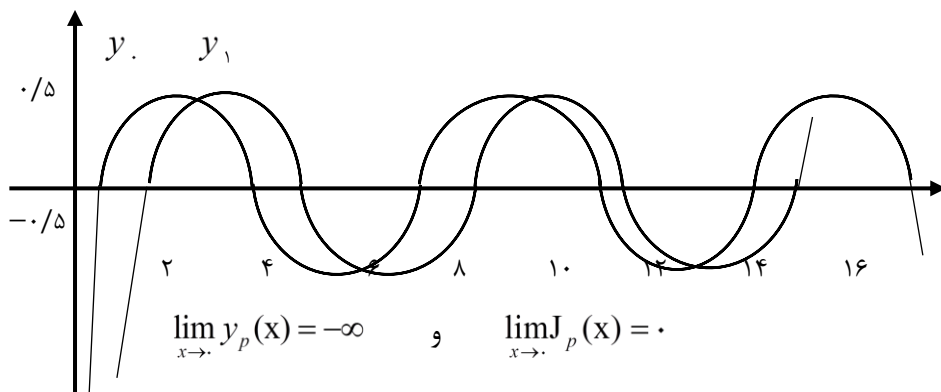
۱. J_n و J_{-n} مستقل خطی نیستند ($n \in \mathbb{Z}$)

۲. به ازای هر عدد صحیح n داریم: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

۳. وقتی α یک عدد صحیح نیست، توابع J_α و $J_{-\alpha}$ جوابهای مستقل خطی معادله دیفرانسیل بر بازه $(0, \infty)$ هستند.

● خواص تابع بسل

الف) توابع بسل نوع اول $(J_p(x))$ حول صفر کراندار هستند و توابع بسل نوع دوم $(y_p(x))$ حول صفر بیکران هستند.



ب) بین هر دو ریشه متوالی $J_n(x)$ ، ریشه‌ای از $J_{n+1}(x)$ وجود دارد و بالعکس.

نکات

۱. اگر x_1 و x_2 دو صفر $J_n(x)$ باشند، آنگاه در بازه $x_1 < x < x_2$ صفری از $J_{n+1}(x)$ وجود دارد.
۲. تابع بسل $J_n(x)$ بر هر بازه‌ای به طول n ، یک صفر دارد.
۳. هریک از توابع $J_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) در بازه $I=[0, e]$ بی‌نهایت صفر مثبت حقیقی دارد.
۴. نخستین صفر $J_n(x)$ بزرگتر از n است.

ج) توابع بسل دارای خواص زیر هستند که به روابط بازگشتی معروف هستند:

- ۱) $\frac{d}{dx}(x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x)$
- ۲) $\frac{d}{dx}(x^{-p} J_p(x)) = -x^{-p} J_{p+1}(x)$
- ۳) $J_{(p+1)}(x) = \frac{2p}{x} J'_p(x) - J_{p-1}(x)$

$$۴) J'_p(x) = \frac{1}{2} (J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x))$$

نکته

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \text{ و } J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

(برای تست بسیار مهم می باشند)

فصل چهارم

دستگاه معادلات دیفرانسیل

● نحوه تبدیل معادله به دستگاه معادلات

ابتدا دستگاه معادلات دیفرانسیل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل همزمان، متشکل از تعدادی تابع مجهول و مشتقات آن‌ها نسبت به یک متغیر مستقل را یک دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌نامند.

به عنوان مثال:

$$\text{در معادله دیفرانسیل} \quad \begin{cases} x'' - y' + x + t^2 = \sin t \\ x' + y' = 1 \end{cases}, \quad \text{و } x \text{ و } y \text{ تابع‌های مجهول هستند و } t \text{ متغیر مستقل می‌باشد.}$$

اگر در معادلات دیفرانسیل دستگاه خطی باشد به آن دستگاه خطی و به صورت مشابه اگر در معادلات، دستگاه غیرخطی باشد، دستگاه غیرخطی می‌نامیم.

مثال: خطی یا غیرخطی بودن دستگاه‌های زیر را مشخص کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف) } \begin{cases} x'(x + 2y') = 1 \\ x'(1 - xy) = 2 \end{cases} & \rightarrow \text{دستگاه غیرخطی است} \\ \text{ب) } \begin{cases} x'' - y' + x + t^2 y = \sin t \\ x' + y' = 1 \end{cases} & \rightarrow \text{دستگاه خطی است} \end{array}$$

توجه داشته باشید حتی اگر یکی از معادلات دستگاه غیرخطی باشد، دستگاه را غیرخطی می‌گوییم.

● دستگاه معادله مرتبه اول

دستگاه $\begin{cases} x' = f_1(x, y, t) \\ y' = f_2(x, y, t) \end{cases}$ را که در آن f_1 و f_2 توابعی از x, y, t می‌باشد، دستگاه معادلات مرتبه اول می‌نامیم. $x(t)$ و $y(t)$ جواب دستگاه است. اگر در هر دو معادله صدق کند.

تذکر

هر معادله مرتبه n ، $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ به صورت زیر، به یک دستگاه معادله تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = y' = x_2 \\ x_2' = y'' = x_3 \\ \vdots \\ x_n' = y^{(n)} = f(x, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

مثال: معادله $y'' + y = \sin t$ را به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل کنید.

حل:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1' = y' = x_2 \\ x_2' = y'' = \sin t - x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin t \end{bmatrix}$$

بنابراین هر دستگاه خطی را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نمایش داد:

$$X' = A(t)X + G(t)$$

$$G(t) \rightarrow \begin{cases} \text{دستگاه همگن است} \rightarrow G(t) = 0 \text{ اگر} \\ \text{دستگاه غیرهمگن است} \rightarrow G(t) \neq 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

● روش‌های حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

در این بخش دو روش زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

- (۱) روش حذفی
- (۲) روش عملگری (اپراتور)

البته در فصل آینده روش دیگری به جز این دو روش ارائه خواهد شد.

روش حذفی را با یک مثال بررسی می‌کنیم.

مثال: دستگاه
$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$
 را به روش حذفی حل کنید.

حل:

ابتدا مشتق‌گیری می‌کنیم:

$$x'' = -y' = -x \rightarrow x'' + x = 0$$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4}}{2} = \pm i$$

$$y(t) = -x' = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

برای اینکه بیشتر با این روش آشنا شویم مثال دیگری را بررسی می‌کنیم.

مثال: دستگاه
$$\begin{cases} x' = 2xt - x \\ y' = 2yt + x \end{cases}$$
 را به روش حذفی حل کنید.

حل:

معادله اول یک معادله خطی مرتبه اول است که با روش جداسدنی می‌توان آن را حل کرد و سپس در دومی جایگزین کرد پس:

$$\frac{dx}{dt} = x(2t - 1) \Rightarrow \frac{dx}{x} = (2t - 1) dt$$

از دو طرف انتگرال می‌گیریم:

$$\int \frac{dx}{x} = \int (2t - 1) dt \Rightarrow \ln x = t^2 - t \Rightarrow x = e^{t^2 - t}$$

$$y' = 2yt + x = 2yt + e^{(t^2 - t)} \Rightarrow y' - 2ty = e^{t^2 - t}$$

که یک معادله خطی مرتبه اول است و جواب آن به سادگی قابل محاسبه است.

در ادامه به عنوان تمرین و با استفاده از تکنیک‌های فصل ۱ معادله را حل کنید.

حال روش دوم یعنی حل دستگاه معادلات دیفرانسیل به روش عملگر را بررسی می‌کنیم.

توجه داشته باشید این روش بسیار شبیه به روش کرامر می‌باشد.

در این روش ابتدا معادله را به صورت ضرایب عملگری می‌نویسیم پس از فرمول کرامر استفاده می‌کنیم.

مثال: دستگاه معادلات زیر را به روش اپراتور حل می‌کنیم

$$\begin{cases} 2 \frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} + 4y = 1 \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = t - 1 \end{cases}$$

حل: با بکار بردن نماد عملگر $D = \frac{d}{dt}$ داریم: (مرتبه می‌کنیم)

$$\begin{cases} (2D - 1)x + (D + 4)y = 1 \\ Dx - Dy = t - 1 \end{cases}$$

مانند روش کرامر ابتدا ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل می‌دهیم و سپس دترمینان می‌گیریم:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2D - 1 & D - 4 \\ D & -D \end{vmatrix} = -2D^2 - 3D$$

حال ماتریس ستونی جواب‌ها را به جای ستون اول ماتریس ضرایب جایگذاری کرده سپس دترمینان را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & D + 4 \\ t - 1 & -D \end{vmatrix} = 4t + 3$$

همین جایگذاری را برای ستون دوم ماتریس ضرایب انجام می‌دهیم و به صورت مشابه دترمینان را حساب می‌کنیم:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2D - 1 & 1 \\ D & t - 1 \end{vmatrix} = 3 - t$$

حال x و y به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4t + 3}{-2D^2 - 3D} \Rightarrow (-2D^2 - 3D)x = -4t + 3$$

که اگر معادله شاخص را مرتبه کنیم:

$$-2r^2 - 3r = 0 \Rightarrow r = 0, r = -1$$

پس جواب عمومی معادله همگن برابر است با:

$$x_h = c_1 e^t + c_2 e^{-t} = c_1 + c_2 e^{-t}$$

$$x_p = t(At + B) = At^2 + Bt, \quad x'_p = 2At + B, \quad x''_p = 2A,$$

$$-3x'' - 2x' = -6A - 6At - 2B = -4t + 3$$

$$-6A = -4 \Rightarrow A = \frac{2}{3}, \quad B = -\frac{5}{3}$$

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{5}{3}t \quad x_p = \frac{2}{3}t^2 - \frac{5}{3}t$$

در این قسمت می‌توان جواب را از روش کرامر بدست آورد، اما روش دیگری ارائه می‌دهیم: (x را در معادله دوم قرار می‌دهیم)

$$D\left(c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{5}{3}t\right) - Dy = t - 1$$

$$-c_2 e^{-t} + \frac{4}{3}t - \frac{5}{3} - Dy = t - 1$$

$$Dy = -c_2 e^{-t} + \frac{4}{3}t - t - \frac{5}{3} + 1 = -c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$$

$$y = c_2 e^{-t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{3}t + c_2$$

مثال: دستگاه معادلات زیر را به روش عملگری حل کنید.

$$\begin{cases} x' + x + 2y = 1 \\ 2x' + x + y' + 3y = e^t \end{cases}, \quad x(\cdot) = 2, \quad x'(\cdot) = 0$$

حل:

$$\begin{cases} x' + x + 2y = 1 \\ 2x' + x + y' + 3y = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D+1)x + 2y = 1 \\ (2D+1)x + (D+3)y = e^t \end{cases}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} D+1 & 2 \\ 2D+1 & D+3 \end{vmatrix} = D^2 + 1$$

$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ e^t & D+3 \end{vmatrix}}{D^2 + 1} = (D^2 + 1)x(t) = 3 - 2e^t$$

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 3 - e^t$$

$$x_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad x_p(t) = 3 - e^t$$

$$x(\cdot) = 2 = c_1 + 2 \rightarrow c_1 = 0$$

$$x(t) = c_2 \sin t + 3 - e^t$$

$$x'(t) = c_2 \cos t - e^t \Rightarrow x'(\cdot) = c_2 - 1 = 0 \rightarrow c_2 = 1$$

$$x(t) = \sin t + 3 - e^t$$

از معادله اول دستگاه داریم:

$$y(t) = \frac{1}{\gamma}(-x - x' + 1) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{\gamma}(-\sin t - \gamma + e^t - \cos t + e^t + 1)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{\gamma}(\gamma e^t - \gamma - \sin t - \cos t)$$

مثال: دستگاه زیر را به روش عملگری حل کنید. (به عنوان تمرین جزئیات مثال را حل کنید)

$$\begin{cases} (D^\gamma - \gamma)x - \gamma y = e^{\gamma t} \\ x + (D^\gamma + \gamma)y = 0 \end{cases}$$

حل:

$$(D^\gamma - 1)x(t) = \gamma e^{\gamma t}$$

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_\gamma \cos t + c_\gamma \sin t + \frac{\gamma}{15} e^{\gamma t} \Rightarrow \gamma y(t) = (D^\gamma - \gamma)x(t) - e^{\gamma t}$$

$$y(t) = \frac{1}{\gamma} \left(c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \gamma c_\gamma \cos t - \gamma c_\gamma \sin t - \frac{1}{5} e^{\gamma t} \right)$$

نکته

برای حالت $f_1(D)g_\gamma(D) - g_1(D)f_\gamma(D) = 0$

اگر در دستگاه جبری $\begin{cases} f_1(D)x + g_1(D)y = h_1(t) \\ f_\gamma(D)x + g_\gamma(D)y = h_\gamma(t) \end{cases}$ ، دترمینان ضرایب برابر صفر باشد،

آنگاه دستگاه جواب ندارد

یا دارای بی نهایت جواب است. به عبارتی اگر با حذف x و y طرف راست دستگاه به صفر تبدیل نشود، دستگاه دارای جواب نیست وقتی طرف راست دستگاه به صفر تبدیل شود، بی نهایت جواب دارد.

● حل معادلات دیفرانسیل به کمک تبدیل لاپلاس

● تعریف تبدیل لاپلاس: فرض کنید تابع $f(t)$ روی فاصله $[0, \infty)$ تعریف شده است.

تبدیل لاپلاس $f(t)$ تابعی است مانند $F(s)$ به صورت:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad s > 0$$

s یک متغیر حقیقی بوده و دامنه تابع $F(s)$ بازه‌ای است که انتگرال فوق به ازای آن

همگرا باشد. توجه داشته باشید که انتگرال فوق یک انتگرال ناسره است.

برای مشخص کردن رابطه f و F می‌نویسیم:

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

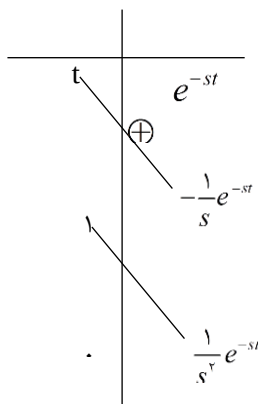
مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = 1$ را پیدا کنید.

$$L\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\left(\frac{-1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = t$ را پیدا کنید.

$$L\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t dt$$

طبق قاعدهٔ صلیب داریم:



چون انتگرال ناسره از نوع اول می‌باشد پس:

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} t e^{-st} - \frac{1}{s^2} e^{-st} \right]_0^T = -\left(-\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = e^{at}$ را بیابید.

$$f(t) = e^{at} \Rightarrow L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a} \quad (\forall s > a)$$

مثال: تبدیل لاپلاس $f(t) = \cos at$ را بنویسید.

$$L\{f(t)\} = L\{\cos at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at dt$$

مقدار انتگرال را می‌توان از روش جزء به جزء محاسبه کرد؛ لذا داریم:

$$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

● جدول تبدیلات لاپلاس توابع مهم

$f(t)$	$F(s)$
۱	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at} (e^{at})$	$\frac{1}{(s-a)}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$

به عنوان مثال لاپلاس t^2 : $L\{t^2\} = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2}{s^3}$

● خواص لاپلاس

● خطی بودن تبدیل لاپلاس

قضیه

هرگاه a و b دو عدد حقیقی و $f(t)$ و $g(t)$ دو تابع باشند که تبدیل لاپلاس آنها موجود باشد، داریم:

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$$

تذکر

قضیه فوق برای تعداد متناهی تابع که دارای تبدیل لاپلاس هستند برقرار است، بنابراین تبدیل لاپلاس یک تبدیل خطی است.

مثال: تبدیل لاپلاس $f(t) = \cos^2 t - \sin t \cos t + \gamma e^{-\gamma t}$ را بدست آورید.

حل: ابتدا باید توابع را به صورتی تنظیم کنیم که صورت این توابع در جدول موجود باشد و چون لاپلاس یک ترکیب خطی است می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= L\{\cos^2 t\} - L\{\sin t \cos t\} + \gamma L\{e^{-\gamma t}\} \\ &= L\left\{\frac{1+\cos 2t}{2}\right\} - L\left\{\frac{\sin 2t}{2}\right\} + \gamma L\{e^{-\gamma t}\} = \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2+4)} - \frac{1}{s^2+4} + \frac{\gamma}{s+\gamma} \end{aligned}$$

مثال: نشان دهید به ازای $s > |a|$:

$$L\{\cosh at\} = \frac{s}{(s^2 - a^2)}$$

$$\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

$$L\{\cosh at\} = L\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}L\{e^{at}\} + \frac{1}{2}L\{e^{-at}\}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{s-a} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+a} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|$$

● تبدیل لاپلاس معکوس

اگر $F(s) = L\{f(t)\}$ آنگاه $f(t)$ را تبدیل وارون $F(s)$ می‌نامند و به صورت $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ نشان می‌دهیم. L^{-1} فیزیک تبدیل خطی است.

(توجه داشته باشید اگر از جدول از سمت چپ به راست استفاده کنیم)

مثال (۱): $L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$

مثال (۲): $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2t$

مثال: مطلوب است تبدیل لاپلاس معکوس تابع $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)(2s-1)}$.

حل: ابتدا کسر را به فرم زیر تجزیه می‌کنیم: (با استفاده از روش هورنر)

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)(2s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{2s-1}$$

به روش پوششی داریم: $A = -\frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{14}$, $C = \frac{4}{21}$

پس:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+3)(2s-1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{6}}{s+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{14}}{s+3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{21}}{2s-1}\right\} = -\frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{14}e^{-3t} + \frac{2}{21}e^{\frac{t}{2}}$$

مثال: تبدیل معکوس عبارت روبرو را حساب کنید.

$$L^{-1}\left\{\frac{s-4}{(s+1)(s^2+4)}\right\}$$

$$\frac{s-4}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{(A+B)s^2 + (B+C)s + (4A+C)}{(s+1)(s^2+4)}$$

با متحد قرار دادن صورت کسر اول و آخر خواهیم داشت: $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$
بنابراین:

$$L^{-1}\left\{\frac{s-4}{(s+1)(s^2+4)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \cos 2t - e^{-t}$$

مثال: لاپلاس معکوس زیر را بیابید.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = 1 - e^{-t}$$

● تابع قطعه‌ای پیوسته

تابع f را بر بازه $[a, b]$ قطعه‌ای پیوسته می‌گوییم، اگر:

۱. f به جز احتمالاً در تعداد متناهی نقطه، مثل $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ از $[a, b]$ پیوسته باشد.

۲. در هر نقطه ناپیوستگی، حدود چپ و راست آن وجود داشته باشد. (یعنی در نقاط ناپیوسته مجانب قائم نداشته باشد)

۳. اگر $x_1 = a$ ، آنگاه f باید دو نقطه x_1 حد راست و اگر $x_n = b$ ، آنگاه f باید در نقطه x_n حد چپ داشته باشد.

مثال: $f(t) = [t]$ روی هر بازه، قطعه‌ای پیوسته است.

نکته

توابعی که مجانب قائم دارند، قطعه‌ای پیوسته نیستند، چون مقدارشان در آنجا بی‌نهایت می‌شود.

مثال: $f(t) = \frac{1}{t^2}$ روی $[-1, 1]$ قطعه‌ای ناپیوسته است (پیوسته نیست)

تذکر

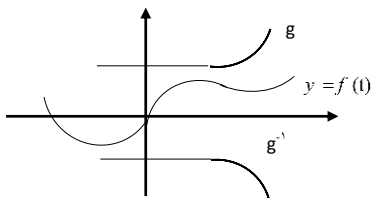
اگر f بر $[a, b]$ قطعه‌ای پیوسته باشد، آنگاه عدد مثبتی مانند M وجود دارد که:
 $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M$
 به عبارت دیگر f بر $[a, b]$ کراندار است.

• **تعریف:** $f(t)$ از مرتبه‌نمایی است، هرگاه اعداد $a, M > 0$ موجود باشد به طوری که:

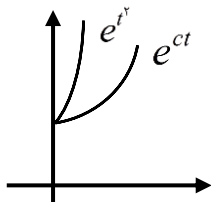
$$|f(x)| \leq Me^{at}$$

تذکر

در تعریف فوق اگر $g(t) = e^{at}$ باشد، می‌گوییم f از مرتبه g است و می‌نویسیم:
 $f(t) = o[g(t)]$



توجه داشته باشید تابع e^{t^2} یک تابع از مرتبه‌نمایی نیست، چرا که تابع e^{t^2} از هر تابع e^{ct} سریعتر رشد می‌کند.



نکته

توابع نمایی، سینوسی، کسینوسی و چندجمله‌ایها و سینوس هیپربولیک و کسینوس هیپربولیک از مرتبه‌نمایی هستند.

● حد تابع

قضیه

فرض کنید تابع $f(t)$ در فاصله $[0, \infty)$ قطعه‌ای پیوسته بوده و از مرتبه‌ی نمایی c باشد در این صورت:

$$۱) \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0, \quad ۲) \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0)$$

(توجه داشته باشید $F(s)$ لاپلاس $f(t)$ است)

مثال: اگر $f(t) = \cos t$ آنگاه $\lim_{s \rightarrow \infty} L\{f(t)\}$ را محاسبه کنید.

$$f(t) = \cos t \Rightarrow L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s^2 + 1} = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^2 + 1} = 1 = \cos(0)$$

● خواص تکنیکی تبدیل لاپلاس

علاوه بر خواص لاپلاس، یکسری تکنیک‌ها را ارائه می‌دهیم:

۱) برای حل معادلات دیفرانسیل قسمت‌های آتی

$$۱) L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

$$۲) L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$$

مثال: لاپلاس $e^{2t} \cos t$ را حساب کنید.

$$L\{e^{2t} \cos t\}$$

ابتدا فرض کنید e^{2t} وجود ندارد پس:

$$L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

حال s هایی که در تبدیل وجود دارد به $s-2$ (ضرب t) تبدیل می‌کنیم:

$$L\{e^{2t} \cos t\} = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 1}$$

مثال: لاپلاس $e^{\tau t} \sin t$ را بنویسید.

$$L\{e^{\tau t} \sin t\} = \frac{1}{(s-\tau)^2 + 1}$$

مثال: لاپلاس $e^{-t} \sin^2 t$ را بدست آورید.

$$L\{e^{-t} \sin^2 t\} = L\left\{e^{-t} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2}\right)\right\} = L\left\{\frac{e^{-t}}{2}\right\} - L\left\{\frac{e^{-t} \cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2(s+1)} - \frac{s+1}{2[(s+1)^2 + 4]}$$

مثال: لاپلاس معکوس $\frac{3s}{s^2 + 4s + 5}$ را بدست آورید.

$$L^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2 + 4s + 5}\right\} = 3L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2 + 1}\right\} = 3L^{-1}\left\{\frac{(s+2)-2}{(s+2)^2 + 1}\right\} = 3L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2 + 1}\right\} - 6L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2 + 1}\right\}$$

$$= 3e^{-2t} \cos t - 6e^{-2t} \sin t$$

نکته

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (\text{باز تعریف فرمول جدید})$$

مثال: لاپلاس معکوس $\frac{1}{s^4}$ را بنویسید.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{t^3}{3!}$$

مثال: لاپلاس معکوس $\frac{1}{(s-2)^4}$ را بنویسید

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^4}\right\} = e^{2t} \frac{t^3}{3!}$$

۲) لاپلاس مشتق

تکنیک دیگری از لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل است.

قضیه

اگر تابع $f(t)$ در فاصله $[0, \infty)$ پیوسته و از مرتبه نمایی و $f'(t)$ قطعه‌ای پیوسته باشد، در این صورت: $L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ و مشابه حالت فوق برای درجات بالاتر در لاپلاس مشتق داریم:

$$L\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

.

.

.

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

(در این کتاب لاپلاس مشتق تا مرتبه سوم بررسی می‌شود)

مثال: لاپلاس مشتق $f(t) = \cos^2 t$ را بدست آورید، سپس با استفاده از آن لاپلاس $f(t)$ را بنویسید.

$$f'(t) = -2 \sin t \cos t = -\sin 2t$$

$$L\{f'(t)\} = L\{-\sin 2t\} = \frac{-2}{s^2 + 4}$$

$$sF(s) - 1 = -\frac{2}{s^2 + 4} \rightarrow sF(s) = \frac{s^2 + 2}{s^2 + 4} \Rightarrow F(s) = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)} \rightarrow L\{\cos^2 t\} = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}$$

(۳) مشتق لاپلاس

قضیه

فرض کنید تابع $f(t)$ در فاصله $[0, \infty)$ قطعه ای پیوسته بوده و از مرتبهٔ نمایی نیز باشد، در این صورت:

$$L\{tf(t)\} = F'(s)$$

$$L\{t^2 f(t)\} = F''(s)$$

.

.

.

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

مثال: لاپلاس‌های زیر را بدست آورید.

الف) $L\{t \sinh t\} = -\left(\frac{1}{s^2 - 1}\right)' = \frac{2s}{(s^2 - 1)^2}$ ب)

$$L\{t^2 \sin t\} = \left(\frac{1}{s^2 + 1}\right)''$$

به عنوان تمرین مشتق دوم قسمت (ب) را بنویسید.

$$F(s) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

مثال: لاپلاس وارون عبارت مقابل را بیابید.

حل: می‌دانیم $L\{tf(t)\} = -F'(s)$ داریم: $F'(s) = \frac{-\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{1}{s^2}} = \frac{-1}{s^2 + 1}$

$$L\{tf(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1} \rightarrow t(f(t)) = \sin t \Rightarrow f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

مثال: لاپلاس معکوس $F(s) = \ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$ را بنویسید.

$$F(s) = \ln(s+1) - \ln(s-1)$$

از طرفین مشتق می گیریم:

$$L\{tf(t)\} = -\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}\right] = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}$$

$$tf(t) = e^t - e^{-t} \Rightarrow f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}$$

(۴) لاپلاس انتگرال

قضیه

$$L\left\{\int_0^t f(x) dx\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad \text{اگر } L\{f(t)\} = F(s) \text{ داریم}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(x) dx \quad \text{نتیجه}$$

مثال: $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right\}$ را بیابید.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{a} \sin ax dx = -\frac{1}{a^2}(\cos at - 1) = \frac{1 - \cos a}{a^2}$$

(اگر از قضیه بالا استفاده نکنیم، باید جواب را با استفاده از روش تجزیه کسر محاسبه کنیم)

تذکر

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^n}\right\} = \int_0^t \int_0^x f(y) dy dx \quad (\text{این قضیه را می توان } n \text{ بار بکار برد.})$$

مثال: $L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s-1)} \right\}$ را بیابید.

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s-1)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{s-1}}{s^2} \right\} = \int_0^t \left(\int_0^x e^y dy \right) dx = \int_0^t (e^x - 1) dx = e^x - x \Big|_0^t = e^t - t - 1$$

می‌باشد؛ به قضیه زیر توجه کنید:

قضیه

فرض کنید $L\{f(t)\} = F(s)$. در این صورت: $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(u) du$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt = \int_s^{+\infty} F(u) du \quad \text{نتیجه:}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_s^{+\infty} F(u) du \quad \text{هرگاه در فرمول } s \rightarrow 0 \text{ میل کند، داریم:}$$

(فرمول بالا، ما را کمک می‌کند به حل انتگرال‌هایی که در درس ریاضی عمومی (۱) نمی‌توانستیم حل کنیم)

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \int_0^{+\infty} L(\sin at) ds = \int_0^{\infty} \frac{a}{s^2 + a^2} ds = \arctan \frac{s}{a} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

مثال: مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ را محاسبه کنید.

مثال: مطلوب است تبدیل لاپلاس تابع مقابل:

$$g(t) = t \int_0^t e^{\tau x} \frac{\sinh x}{x} dx$$

$$L\left\{t \int_0^t e^{\tau x} \frac{\sinh x}{x} dx\right\} = (-1) \frac{d}{ds} \left[L\left\{\int_0^t e^{\tau x} \frac{\sinh x}{x} dx\right\} \right] \quad \text{حل:}$$

حال لاپلاس $\int_0^t e^{\tau x} \frac{\sinh x}{x} dx$ را محاسبه می‌کنیم:

$$L\left\{t \int_0^t e^{\tau x} \frac{\sinh x}{x} dx\right\} = \frac{L\left\{e^{\tau x} \frac{\sinh x}{x}\right\}}{s} = \frac{\left[L\left\{\frac{\sinh x}{x}\right\}\right]_{s \rightarrow (s-\tau)}}{s}$$

$$= \frac{\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{u^2-1} du\right)_{s \rightarrow (s-\tau)}}{s} = \frac{\left(\frac{1}{2} \ln \left|\frac{s-1}{s+1}\right|\right)_{s \rightarrow (s-\tau)}}{s} = \frac{\frac{1}{2} \ln \left|\frac{s-\tau}{s-1}\right|}{s}$$

پس داریم:

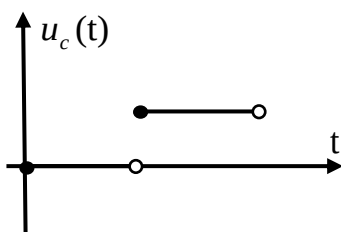
$$L\left\{\int_0^t e^{rx} \frac{\sinh x}{x} dx\right\} = \frac{1}{2} \frac{Ln\left[\frac{s-3}{s-1}\right]}{s}$$

و در پایان خواهیم داشت:

$$L\left\{\int_0^t e^{rx} \frac{\sinh x}{x} dx\right\} = \frac{(-1)}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{Ln|s-3| - Ln|s-1|}{s} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{Ln\left|\frac{s-3}{s-1}\right|}{s^2} - \frac{1}{s-3} + \frac{1}{s-1} \right]$$

(۵) لاپلاس و توابع پله‌ای

برای $c \geq 0$ تابع $u_c(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$ به تابع پله‌ای واحد معروف است.

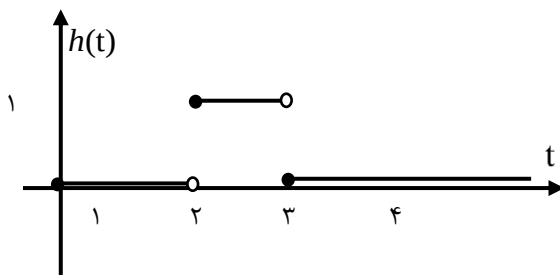


مثال: نمودار تابع $h(t) = u_r(t) - u_r(t)$ را رسم کنید.

حل: برای توابع ترکیبی پله‌ای واحد ابتدا دامنه‌ها را یکی می‌کنیم سپس مقدار تابع را در توابع جدا از هم جمع (یا تفریق) جبری می‌کنیم:

$$h(t) = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & 0 \leq t < 2 \\ 1 - 0 = 1 & 2 \leq t < 4 \\ 1 - 1 = 0 & t \geq 4 \end{cases}$$

از این رو:



اکنون به محاسبه لاپلاس توابع پله‌ای می‌پردازیم:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases} \quad \text{اگر یک تابع پله‌ای واحد باشد}$$

آنگاه:

(چون دو ضابطه‌ای است پس به دو انتگرال از بازه صفر تا c و انتگرال از c تا $+\infty$ تقسیم می‌شود، انتگرال اول یعنی از صفر تا c که جوابش صفر می‌شود و اگر انتگرال دوم را محاسبه کنیم و جایگذاری کنیم به عبارت زیر می‌رسیم)

$$L\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}$$

مثال: لاپلاس $\left\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)\right\}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$L\left\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)\right\} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} \quad \text{با توجه به رابطه بخش قبل}$$

تذکر

از تابع پله‌ای واحد می‌توان برای انتقال تابع داده شده f که دامنه تعریف آن $t \geq 0$ ، به اندازه c واحد در جهت راست استفاده کرد.
برای مثال تابع تعریف شده توسط:

$$y = u_c(t) f(t-c) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < c \\ f(t-c) & t \geq c \end{cases}$$

نتیجه:

$$L\{u_c(t) f(t-c)\} = e^{-cs} F(s)$$

نتیجه قبل به قضیه انتقال دوم در لاپلاس معروف است:

$$L^{-1}\{e^{-cs} F(s)\} = u_c(t) f(t-c)$$

مثال: با توجه به نتیجه بالا، لاپلاس‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } L\{u_{\frac{\pi}{2}}(t)(t-\frac{\pi}{2})^3\} = e^{-\frac{\pi}{2}s} \cdot \frac{6}{s^4}$$

$$\text{ب) } L^{-1} \left\{ \frac{e^{-s}}{s^2 + 1} \right\} = u_1(t) \sin(t - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } L \left\{ u_r(t)(t+1)^2 \right\} &= L \left\{ u_r(t)(t-2+2)^2 \right\} = L \left\{ u_r(t) \left[(t-2)^2 + 6(t-2) + 9 \right] \right\} \\ &= e^{-2s} \left(\frac{2}{s^2} + \frac{6}{s} + \frac{9}{s} \right) \end{aligned}$$

$$\text{د) } L^{-1} \left\{ \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s(s^2 + 1)} \right\} = u_{\frac{\pi}{2}}(t) \left(1 - \cos \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right) = u_{\frac{\pi}{2}}(t) (1 - \sin t)$$

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس تابع $F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)}$ را بیابید.

حل:

با استفاده از تجزیه $\frac{1}{s(s^2 + 4)}$ به کسرهای ساده داریم:

$$\frac{1}{s(s^2 + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4}$$

که در آن $A = \frac{1}{4}$ ، $B = -\frac{1}{4}$ ، $C = 0$ است بنابراین:

$$L^{-1} \left\{ \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)} \right\} = L^{-1} \left\{ e^{-\pi s} \left(\frac{\frac{1}{4}}{s} - \frac{\frac{s}{4}}{s^2 + 4} \right) \right\} = \frac{1}{4} L^{-1} \left\{ \frac{e^{-\pi s}}{s} \right\} - \frac{1}{4} L^{-1} \left\{ \frac{se^{-\pi s}}{(s^2 + 4)} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} u_{\pi}(t) - \frac{1}{4} \cos 2(t - \pi) u_{\pi}(t)$$

نکته

تابع دو ضابطه‌ای، از راست پیوسته $t \geq a$ و $f(t) = \begin{cases} f_1(t) & t < a \\ f_2(t) & t \geq a \end{cases}$ را می‌توان به صورت یک ضابطه‌ای به فرم مقابل نوشت:

$$f(t) = f_1(t) + u_a(t) [f_2(t) - f_1(t)]$$

با استفاده از تکنیک بالا می‌توان به صورت مشابه توابع بیشتر از دو ضابطه را نیز به یک ضابطه تبدیل کرد.

مثال: تابع سه ضابطه‌ای زیر را بصورت تابع پله‌ای نمایش دهید.

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < \pi \\ \cdot & \pi \leq t < 2\pi \\ \sin t & t \geq 2\pi \end{cases}$$

حل:

$$f(t) = t + u_{\pi}(t)[\cdot - t] + u_{2\pi}(t)[\sin t - \cdot]$$

۶) لاپلاس توابع متناوب

تابع متناوب تابعی است که در آن:

$$\forall t \in D_f : f(t+T) = f(t)$$

قضیه

اگر $f(t)$ برای $t \geq 0$ قطعه‌ای پیوسته و از مرتبه‌نمایی باشد، در این صورت اگر $f(t)$ دوره

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-Ts}} \quad \text{تناوب } T \text{ داشته باشد، آنگاه:}$$

مثال: فرض کنید $f(t+2) = f(t)$ ، $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & -1 \leq t < 0 \end{cases}$ نشان دهید:

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s} \tanh \frac{s}{2}$$

حل:

با توجه به قضیه قبل داریم:

$$\begin{aligned} T=2 \Rightarrow L\{f(t)\} &= \frac{\int_0^2 e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{\int_0^1 e^{-st} dt - \int_1^2 e^{-st} dt}{1 - e^{-2s}} = \frac{-\frac{1}{s}[e^{-s} - 1] + \frac{1}{s}[e^{-2s} - e^{-s}]}{1 - e^{-2s}} \\ &= \frac{\frac{1}{s}[1 - e^{-s}]}{1 + e^{-s}} = \frac{1}{s} \frac{e^{-\frac{s}{2}} \left[e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}} \right]}{e^{-\frac{s}{2}} \left[e^{\frac{s}{2}} + e^{-\frac{s}{2}} \right]} = \frac{1}{s} \tanh \frac{s}{2} \end{aligned}$$

همانطور که می‌دانیم تبدیل لاپلاس یک تبدیل خطی است و به همین دلیل معکوس آن نیز خطی است یعنی:

$$L^{-1}\{F(s)+G(s)\}=L^{-1}\{F(s)\}+L^{-1}\{G(s)\}$$

تذکر

اما تبدیل معکوس حاصلضرب دو تابع $F(s)$ و $G(s)$ به صورت حاصلضرب تبدیل معکوس آنها نیست یعنی:

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} \neq L^{-1}\{F(s)\}+L^{-1}\{G(s)\}.$$

به مثال زیر توجه کنید:

$$t = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}\right\} \neq L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \times 1 = 1$$

۷) ضرب پیچشی (تلفیقی) _ کنولوسیون

یکی دیگر از خواص تکنیکی لاپلاس ضرب پیچشی است، به قضیه زیر توجه کنید:

قضیه

اگر $F(s)=L\{f(t)\}$ و $G(s)=L\{g(t)\}$ هر دو به ازای $s > a \geq 0$ وجود داشته باشند،

$$H(s)=F(s)G(s)=L\{h(t)\}, \quad s > a$$

که در آن $h(t)=\int_0^t f(t-x)g(x)dx=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$ که تابع h به کنولوسیون

f و g معروف است و آن را با $h=f*g$ نشان می‌دهیم و می‌توان نوشت:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx=\int_0^t g(t)f(t-x)dx$$

ضرب پیچشی دارای خواصی است:

$$۱) f*g=g*f$$

$$۲) f*(g*h)=(f*g)*h$$

$$۳) f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$$

$$۴) f*1 \neq f$$

$$۴) f*0=0.$$

مثال: با بکار بردن انتگرال تلفیقی تبدیل معکوس تابع $H(s) = \frac{a}{s^r(s^r + a^r)}$ را پیدا کنید.

حل:

$$H(s) = \frac{1}{s^r} \cdot \frac{a}{(s^r + a^r)} = F(s) \cdot G(s)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^r} \Rightarrow f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^r}\right\} = t$$

$$G(s) = \frac{a}{(s^r + a^r)} \Rightarrow g(t) = L^{-1}\left\{\frac{a}{(s^r + a^r)}\right\} = \sin at$$

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t (t-x) \sin ax dx$$

با بکار بردن انتگرال گیری جز به جز و محاسبه انتگرال طرف راست داریم:

$$h(t) = \frac{at - \sin at}{a^r}$$

روش دوم: (با استفاده از تجزیه کسرها)

$$H(s) = \frac{a}{s^r(s^r + a^r)}$$

$$H(s) = \frac{1}{a^r} \left[\frac{a}{s^r} - \frac{a}{(s^r + a^r)} \right] \Rightarrow h(t) = \frac{1}{a^r} [at - \sin at]$$

قضیه

این بار تعریفی از کنولوسیون است:

$$L\{f(t) * g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$$

$$L^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = f(t) * g(t)$$

مثال: لاپلاس معکوس زیر را محاسبه کنید.

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^r + 1)^r}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^r + 1)^r}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^r + 1} \cdot \frac{1}{s^r + 1}\right\} = \cos t * \sin t$$

حل:

مثال: تابع $f(t) = t * t$ را بدست آورید.

حل:

$$f(t) * g(t) = L^{-1} \{ F(s) \cdot G(s) \}$$

$$t * t = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4} \right\} = \frac{t^3}{3!}$$

● حل معادلات به کمک تبدیل لاپلاس

در این قسمت قصد داریم به کمک تکنیک‌هایی که در قسمت قبل گفته شد، به حل معادلات دیفرانسیل بپردازیم.

معادلاتی که مورد بحث قرار می‌گیرند:

۱. معادلات خطی با ضرایب ثابت ناهمگن

۲. معادلت خطی با ضرایب غیر ثابت

۳. معادلات انتگرالی

نوع اول را در یک مثال بررسی می‌کنیم:

مثال: مطلوب است حل معادله زیر:

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{-t}$$

$$y(0) = 0 \text{ و } y'(0) = 1 : \text{شرایط اولیه}$$

حل:

از طرفین لاپلاس می‌گیریم:

$$L\{y''\} - 5L\{y'\} + 6L\{y\} = L\{2e^{-t}\}$$

$$\cancel{s^2 L\{y\}} - \cancel{s y(0)} - \cancel{y'(0)} - 5[sL\{y\} - y(0)] + 6L\{y\} = L\{2e^{-t}\}$$

با در نظر گرفتن $L\{y\} = Y(s)$ خواهیم داشت:

$$(s^2 - 5s + 6)Y(s) - 1 = \frac{2}{s+1} \rightarrow (s^2 - 5s + 6)Y(s) = \frac{2}{s+1} + 1$$

حال طرفین را به ضریب $Y(s)$ تقسیم می‌کنیم:

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s^2 - 5s + 6)} + \frac{1}{s^2 - 5s + 6}$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s-3)(s-2)} + \frac{1}{(s-3)(s-2)}$$

با تجزیه کسرها و تعیین ضرایب خواهیم داشت:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-3} + \frac{-2}{s-2} + \frac{1}{s-3} + \frac{-1}{s-2} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s-3} - \frac{3}{s-2}$$

$$y(t) = \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{5}{3}e^{2t} \quad \text{حال از طرفین تبدیل لاپلاس معکوس می‌گیریم:}$$

سپس در حالت کلی با تبدیل لاپلاس می‌توانیم تمام معادلاتی که به صورت دسته اول هستند (یعنی ضرایب ثابت و با طرف دوم (غیرهمگن)، حل کرد.

تکنیک حل همانطور که در مثال قبل بررسی شد به این صورت است که:

۱. از طرفین لاپلاس می‌گیریم.

۲. شرایط اولیه داده شده را اعمال می‌کنیم.

۳. پس از دسته‌بندی و دو طرف یک طرف کردن، $Y(s)$ را در طرف اول نگه می‌داریم.

۴. عبارتی که در طرف دوم ایجاد می‌شود، با استفاده از تجزیه کسرها یا تکنیک‌های دیگر مرتب می‌کنیم.

۵. در انتها از طرفین، لاپلاس معکوس می‌گیریم، جواب بدست خواهد آمد.

مثال: معادله با شرایط اولیه زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y'' - y' - 6y = \cos 2t \quad \text{و} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$(s^2 - s - 6)L\{y\} = L\{\cos 2t\}$$

حل:

$$L\{y\} = \frac{s}{s^2 - s - 6} = \frac{s}{(s^2 + 4)(s - 3)(s + 2)}$$

$$L\{y\} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{C}{s - 3} + \frac{D}{s + 2}$$

با تجزیه کسرها خواهیم داشت:

با تعیین ضرایب جواب نهایی بدین صورت مشخص می‌شود:

$$y(t) = \frac{3}{65}e^{3t} + \frac{1}{20}e^{-2t} - \frac{1}{26}\sin 2t - \frac{5}{52}\cos 2t$$

مثال: با استفاده از تبدیلات لاپلاس جواب مسأله را پیدا کنید.

$$x''(t) + 4x(t) = f(t)$$

$$x(0) = 1 \quad \text{و} \quad x'(0) = 0$$

(توجه داشته باشید طرف دوم تابعی گسسته است و با روش‌های فصل‌های قبل نمی‌توان این مسئله را حل کرد)

$$f(t) = \begin{cases} 4t & 0 \leq t < 1 \\ 4 & t \geq 1 \end{cases}$$

حل:

ابتدا تابع دو ضابطه‌ای $f(t)$ را به یک تابع تک ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$f(t) = 4t + (4 - 4t)u_1(t) = 4t - 4(t-1)u_1(t)$$

$$L\{f(t)\} = \frac{4}{s^2} - \frac{4}{s^2}e^{-s}$$

اکنون از طرفین معادله $x''(t) + 4x(t) = f(t)$ لاپلاس می‌گیریم. داریم:

$$L\{x''\} + 4L\{x\} = L\{f(t)\}$$

$$s^2 L\{x\} - sx(0) - x'(0) + 4L\{x\} = \frac{4}{s^2} - \frac{4}{s^2}e^{-s} (s^2 + 4)L\{x\} - s$$

$$= \frac{4}{s^2} - \frac{4}{s^2}e^{-s}$$

$$L\{x\} = \frac{4}{s^2(s^2 + 4)} - \frac{4}{s^2(s^2 + 4)}e^{-s} + \frac{s}{s^2 + 4}$$

با استفاده از تجزیه کسرها داریم:

$$\frac{4}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4}$$

بنابراین:

$$L\{x\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4} - \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4} \right) e^{-s} + \frac{s}{s^2 + 4}$$

و با گرفتن لاپلاس معکوس از معادله فوق:

$$x(t) = t - \frac{1}{4} \sin 2t - (t-1)u_1(t) + \frac{1}{4} \sin 2(t-1)u_1(t) + \cos 2t$$

حال نوع دوم، یعنی معادلات دیفرانسیل با ضرایب تغییر را با استفاده از یک مثال

بررسی می‌کنیم.

مثال: مطلوب است حل معادله دیفرانسیل زیر:

$$ty'' - ty' - y = e^t - 1$$

$$y(\cdot) = 0 : \text{شرط اولیه}$$

حل:

از طرفین معادله لاپلاس می گیریم:

$$L\{ty''\} - L\{ty'\} - L\{y\} = L\{e^t - 1\}$$

$$(-1)[L\{y''\}]' + [L\{y'\}]' - L\{y\} = L\{e^t - 1\}$$

$$(-1)[s^\tau L\{y\} - sy(\cdot) - y'(\cdot)]' + [sL\{y\} - y(\cdot)]' - L\{y\} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

$$(-1)[\tau sL\{y\} + s^\tau L'\{y\}] + [L\{y\} + sL'\{y\}] - L\{y\} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

قرار می دهیم $L\{y\} = Y(s)$ ، داریم:

$$Y'(s)(-s^\tau + s) - \tau sY(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

$$Y'(s) + \frac{\tau}{s-1}Y(s) = \frac{1}{s^\tau(s-1)} - \frac{1}{(s-1)^\tau s}$$

حال معادله مرتبه اول ایجاد شده را حل می کنیم:

$$\mu(s) = e^{\int \frac{\tau}{s-1} ds} = (s-1)^\tau$$

$$Y(s) = (s-1)^\tau \left[\int \frac{s-1}{s^\tau} - \frac{1}{s} ds + c_1 \right]$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^\tau} \left[\frac{1}{s} + c_1 \right] = \frac{1}{s(s-1)^\tau} + \frac{c_1}{(s-1)^\tau}$$

پس از تجزیه کسر ها و تعیین ضرایب داریم:

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^\tau} + \frac{c_1}{(s-1)^\tau}$$

از طرفین لاپلاس معکوس می گیریم:

$$y(t) = 1 - e^t + (c_1 + 1)te^t$$

● معادلات دیفرانسیل از نوع معادلات انتگرالی

یک معادله که در آن انتگرال تابعی مجهول یا ترکیب مشتق تابع مجهول و انتگرال حاصلضرب توابعی معلوم و مجهول باشد را معادله انتگرالی می‌گوییم.

تذکر

یکی از کاربردهای مهم انتگرال تلفیقی، حل معادلات انتگرالی است.

مثال: معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

$$f(t) = 1 + 2 \int_0^t f(t-u) e^{-2u} du$$

حل:

از تکنیک انتگرال تلفیقی استفاده می‌کنیم.

$$f(t) = 1 + 2 \int_0^t f(t-u) e^{-2u} du = 1 + 2 f(t) * e^{-2t}$$

از طرفین لاپلاس می‌گیریم:

$$F(s) = \frac{1}{s} + 2F(s) \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$\left(1 - \frac{2}{s+2}\right) F(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow F(s) = \frac{s+2}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}$$

حال از دو طرف لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$f(t) = 1 + 2t$$

● حل دستگاه به روش تبدیل لاپلاس

در این روش با استفاده از ویژگی‌های تکنیکی تبدیل لاپلاس از هر معادله دستگاه تبدیل لاپلاس گرفته و دستگاه را به یک دستگاه جبری تبدیل می‌کنیم. سپس با حل این دستگاه و استفاده از تبدیل معکوس، جواب دستگاه معادلات را بدست می‌آوریم.
با مثالی این نوع حل دستگاه معادلات دیفرانسیل را بررسی می‌کنیم.

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$x(0) = x'(0) = 0, y(0) = 1$$

$$\begin{cases} x' + y' + y - 2x = 0 \\ x'' - 3x' + y' - y = 0 \end{cases}$$

حل:

با استفاده از تبدیل لاپلاس داریم:

$$\begin{cases} sL\{x\} + sL\{y\} - 1 + L\{y\} - 2L\{x\} = 0 \\ s^2 L\{x\} - 2sL\{x\} + sL\{y\} - 1 - L\{y\} + 2L\{x\} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s-2)L\{x\} + (s+1)L\{y\} = 1 \\ (s^2 - 2s + 2)L\{x\} + (s-1)L\{y\} = 1 \end{cases}$$

حال با استفاده از حل دستگاه:

$$\Delta = \begin{vmatrix} s-2 & s+1 \\ s^2-2s+2 & s-1 \end{vmatrix} = -s(s-1)(s-2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & s+1 \\ 1 & s-1 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} s-2 & 1 \\ s^2-2s+2 & 1 \end{vmatrix} = -(s-2)^2$$

$$L\{x\} = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2}{-s(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2} \Rightarrow x(t) = 1 - 2e^t + e^{2t}$$

$$L\{y\} = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{s-2}{s(s-1)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s-1} \Rightarrow y(t) = 2 - e^t$$

تمرین‌های

تکمیلی

مثال ۱. معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = 2 + \sec 2x$ را حل نمایید.

حل: برای حل معادله، کفایت از طرفین معادله دیفرانسیل فقط یک بار انتگرال بگیریم.

$$y' = Lnx + \sec 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = Lnx + \sec 2x \Rightarrow \int dy = \int (Lnx + \sec 2x) dx + C_1$$

$$\Rightarrow y(x) = xLnx - x + \frac{1}{2} Ln|\sec 2x + \tan 2x| + C_1, \quad (1)$$

از این رو، رابطه (۱) را یک خانواده یک پارامتری از جواب‌های معادله دیفرانسیل می‌گویند که در آن C_1 یک ثابت اختیاری می‌باشد.

مثال ۲. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y'' = \frac{1}{1+x^2}$ را حل نمایید.

حل: برای حل معادله، کفایت از طرفین معادله دیفرانسیل فقط دو بار انتگرال بگیریم.

$$y'' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int dy' = \int \frac{1}{1+x^2} dx + C_1 \Rightarrow y' = \tan^{-1} x + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan^{-1} x + C_1 \Rightarrow \int dy = \int (\tan^{-1} x + C_1) dx + C_2$$

$$(II) \quad y(x) = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} Ln(1+x^2) + C_1 x + C_2 \quad (I)$$

$$u = \tan^{-1} x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \int \tan^{-1} x dx = uv - \int v du = x \tan^{-1} x - \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right.$$

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} Ln(1+x^2) \quad , \quad (II)$$

بنابراین رابطه (I) را یک خانواده دو پارامتری از جواب‌های معادله دیفرانسیل می‌گویند که در آن پارامترهای C_1 ، C_2 دو ثابت اختیاری می‌باشند.

نکته

برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم به صورت $p(x)y'' + p'(x)y' = R(x)$ که قابل

بیان به فرم $\frac{d}{dx}(p(x)y') = R(x)$ می‌باشند، خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') = R(x) = \int d(p(x)y') = \int R(x) dx + C \Rightarrow p(x)y' = \int R(x) dx + C$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\int R(x) dx + C}{p(x)} \Rightarrow y(x) = \int \frac{\int R(x) dx + C}{p(x)} dx + C'$$

مثال ۳. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $xyy'' - xy'^2 = y^2$ را حل نمائید.

حل: ابتدا معادله دیفرانسیل را به فرم $\frac{d}{dx}(p(x)y') = R(x)$ در می آوریم:

$$xyy'' - xy'^2 = y^2 \Rightarrow x(yy'' - y'^2) = y^2 \Rightarrow \frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int d\left(\frac{y'}{y}\right) = \int \frac{1}{x} dx + C \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int (\ln x + C) dx + C' \Rightarrow \ln y = x \ln x - x + Cx + C'$$

$$\Rightarrow \ln y - \ln x^x = \underbrace{(C-1)}_A x + C' \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{x^x}\right) = Ax + C'$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x^x} = e^{Ax+C'} \Rightarrow y = x^x e^{Ax} e^{C'} \xrightarrow{e^{C'}=B} y = Be^{Ax} x^x, \quad (I)$$

بنابراین رابطه (I) را یک خانواده دو پارامتری از جواب های معادله دیفرانسیل می گویند. که در آن A و B دو ثابت اختیاری می باشند.

نکته

هر معادله دیفرانسیل لزوماً دارای جواب نمی باشد و علاوه معادلات دیفرانسیل ساده ای نیز وجود دارند که جواب های شامل پارامترهای اساسی آنها بیشتر از مرتبه معادله دیفرانسیل می باشند.

مثال ۴. معادله دیفرانسیل مرتبه اول $|y'| + 2 = 0$ و معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$|y''| + 2 = 0$ و همچنین معادله دیفرانسیل مرتبه n ام $|y^{(n)}| + 2 = 0$ دارای جواب

نمی باشند یعنی هیچ تابع حقیقی از x در این معادلات صدق نمی کنند.

مثال ۵. معادله دیفرانسیل مرتبه اول $(y')^2 + y^4 = 0$ و معادله مرتبه دوم $(y'')^2 + y^2 = 0$

و همچنین معادله دیفرانسیل مرتبه n ام $(y^{(n)})^2 + y^2 = 0$ فقط دارای یک جواب $y = 0$

می باشند، ولی دارای جواب های شامل ثابت دلخواه نیستند.

نکته

قضیه وجود و یگانگی جواب ها را می توان با استفاده از روش تخمین های متوالی که به روش تکرار پیکارد معروف است اثبات نمود.

مثال ۶. با استفاده از روش تکرار پیکارد، مسأله با مقدار اولیه $y(\cdot) = 1$ ، $y' = y$ را حل نمایید.

حل: معادله انتگرال متناظر با معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y) = y$ عبارت است از:

$$y_n(x) = y + \int_x^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \Rightarrow y_n(x) = 1 + \int_x^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

$$\text{if } n = 1 \xrightarrow{y_1(x)=1} y_1(x) = 1 + \int_x^x f(t, y_1(t)) dt = 1 + \int_x^x (1) dt = 1 + x$$

$$\text{if } n = 2 \xrightarrow{y_2(x)=1+x} y_2(x) = 1 + \int_x^x f(t, y_1(t)) dt = 1 + \int_x^x (1+t) dt = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!}$$

$$\text{if } n = 3 \xrightarrow{y_3(x)=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}} y_3(x) = 1 + \int_x^x f(t, y_2(t)) dt = 1 + \left(1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} \right) dt$$

$$= 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$y_n(x) = 1 + \int_x^x f(t, y_{n-1}(t)) dt = 1 + \int_x^x y_{n-1}(t) dt$$

$$= 1 + \int_x^x \left(1 + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right) dt$$

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \Rightarrow y(x) = e^x$$

$$= 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

بنابراین، این دنباله جواب‌ها به $y(x) = e^x$ همگرا می‌باشد.

مثال ۷. جواب خصوصی معادله $y' = y - ye^x$ را تحت شرایط اولیه $y(\cdot) = 1$ بیابید.

حل: معادله دیفرانسیل مرتبه اول از نوع جداسدنی است.

از این رو داریم:

$$(1 + e^x) \frac{dy}{dx} = y - ye^x \Rightarrow (1 + e^x) dy = y(1 - e^x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{1 + e^x} - \frac{e^x}{1 + e^x} \right) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{e^{-x}}{1 + e^x} - \frac{e^x}{1 + e^x} \right) dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^x) + \ln|C|$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln \left(\frac{Ce^x}{(1+e^x)^r} \right) \Rightarrow y = \frac{Ce^x}{(1+e^x)^r}$$

$$\xrightarrow{y(0)=1} 1 = \frac{Ce^0}{(1+e^0)^r} \Rightarrow C = r \Rightarrow y = \frac{re^x}{(1+e^x)^r}$$

مثال ۸. جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = \cos(x-y)$ را بیابید.

حل: با قرار دادن $u = x - y$ و از آنجا $u' = 1 - y'$ در معادله خواهیم داشت:

$$y' = \cos(x-y) \Rightarrow 1 - u' = \cos u \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 - \cos u ; \quad 1 - \cos u = 2 \sin^2 \frac{u}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \sin^2 \frac{u}{2} \Rightarrow \frac{du}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} = dx \Rightarrow \frac{1}{2} \int \left(1 + \cot^2 \frac{u}{2} \right) du = \int dx$$

$$\Rightarrow -\cot \frac{u}{2} = x + C \xrightarrow{u=x-y} -\cot \frac{x-y}{2} = x + C$$

مثال ۹. جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = \frac{y}{x - \sqrt{xy}}$ را بیابید.

حل: با فرض $f(x, y) = \frac{y}{x - \sqrt{xy}}$ ، به ازای هر پارامتر دلخواه $t > 0$ داریم:

$$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx - \sqrt{(tx)(ty)}} = \frac{ty}{tx - \sqrt{t^2 xy}} = \frac{ty}{tx - t\sqrt{xy}} = t \left(\frac{y}{x - \sqrt{xy}} \right) = t f(x, y) \Rightarrow n = 0$$

پس تابع $f(x, y)$ همگن از درجه صفر می‌باشد. از این رو با قرار دادن $y = ux$ و از

آنجا $y' = u + xu'$ در معادله داریم:

$$y = ux \Rightarrow y' = u + xu' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = udx + xdu \quad , \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(I)} (x - \sqrt{x^2 u}) (udx + xdu) = uxdx$$

$$y' = \frac{y}{x - \sqrt{xy}} \Rightarrow (x - \sqrt{xy}) dy = ydx$$

$$\Rightarrow x(1 - \sqrt{u}) (udx + xdu) = uxdx \Rightarrow (1 - \sqrt{u}) (udx + xdu) = udx$$

$$\Rightarrow udx + xdu - u\sqrt{u}du = udx \Rightarrow x(1 - \sqrt{u})du = u\sqrt{u}dx$$

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{u}}{u\sqrt{u}} dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \left(\frac{1}{u\sqrt{u}} - \frac{1}{u} \right) du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int \left(u^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{u} \right) du = \ln|x| + C \Rightarrow \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \ln|u| = \ln|x| + C$$

$$u = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{\frac{y}{x}}} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + C$$

مثال ۱۰. جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = \frac{x+3y}{x-y}$ را بیابید.

حل: با توجه به اینکه درجه هر جمله برابر یک است لذا معادله داده شده از نوع همگن است از این رو با قرار دادن $y = zx$ و از آنجا $dy = zdx + xdz$ در معادله خواهیم داشت:

$$y' = \frac{x+3y}{x-y} \Rightarrow (x-y)dy = (x+3y)dx \Rightarrow (x-zx)(zdx + xdz) = (x+3zx)dx$$

$$\Rightarrow (1-z)(zdx + xdz) = (1+3z)dx \Rightarrow zdx + xdz - z^2dx - zxdz = dx + 3zdx$$

$$\Rightarrow x(1-z)dz = (z^2 + 3z + 1)dx \Rightarrow \frac{z-1}{(z+1)^2} dz = -\frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{(z+1)^{-2}}{(z+1)^2} dz = \int -\frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \left(\frac{1}{z+1} - \frac{2}{(z+1)^2} \right) dz = -\ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \ln|z+1| + \frac{2}{z+1} = -\ln|x| + C \xrightarrow{z=\frac{y}{x}} \ln\left|\frac{y}{x}+1\right| + \frac{2}{\frac{y}{x}+1} = C - \ln|x|$$

$$\Rightarrow \ln|x+y| - \ln|x| + \frac{2x}{x+y} = C - \ln|x| \Rightarrow \ln|x+y| + \frac{2x}{x+y} = C$$

مثال ۱۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = \frac{x+y+1}{2x+2y+3}$ را بیابید.

حل: با توجه به اینکه دوخط $x+y+1=0$ ، $2x+2y+3=0$ باهم موازی هستند، از این رو با قرار دادن $u = x+y$ و از آنجا $u' = 1+y'$ در معادله داریم:

$$u' - 1 = \frac{u+1}{2u+3} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u+1}{2u+3} + 1 \Rightarrow du = \left(\frac{2u+4}{2u+3} \right) dx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2u+3}{3u+4} \right) du = dx \Rightarrow \int \left(\frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{3}}{3u+4} \right) du = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}u + \frac{1}{9} \ln|3u+4| = x + C' \Rightarrow 2u + \ln|3u+4| = 9x + C$$

$$\underline{\underline{y=x+y}} \Rightarrow 2(x+y) + \ln|3x+3y+4| = 9x + C$$

مثال ۱۲. جواب عمومی معادله $(y \sin x + yx \cos x)dx + (x \sin x + 2y)dy = 0$ را بیابید.

حل: با توجه به معیار کامل بودن معادله داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y \sin x + yx \cos x) = \sin x + x \cos x \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \sin x + 2y) = \sin x + x \cos x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

از این رو، معادله دیفرانسیل کامل است و با توجه به $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int M(x, y)dx + g(y) = \int (y \sin x + yx \cos x)dx + g(y) \\ &= -y \cos x + xy \sin x + y \cos x + g(y) = xy \sin x + g(y) \end{aligned}$$

از طرفی با توجه به $\frac{\partial f}{\partial x} = N(x, y)$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= N(x, y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(xy \sin x + g(y)) = x \sin x + 2y \\ \Rightarrow x \sin x + g'(y) &= x \sin x + 2y \Rightarrow g(y) = \int 2y dy \Rightarrow g(y) = y^2 + C \end{aligned}$$

بنابراین، جواب عمومی معادله عبارتست از:

$$f(x, y) = yx \sin x + y^2 + C = 0$$

مثال ۱۳. مقدار را طوری بیابید که تابع $\mu(x, y) = \frac{y+1}{x^a}$ یک عامل انتگرال ساز برای

معادله دیفرانسیل مرتبه اول $3(y+1) - 2xy' = 0$ باشد.

حل: اگر $\mu(x, y) = \frac{y+1}{x^a}$ عامل انتگرال ساز معادله $3(y+1)dx - 2xydy = 0$ باشد، آنگاه

داریم:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{y+1}{x^a} \cdot 3(y+1) \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{y+1}{x^a} \cdot (-2x) \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{3(y+1)^2}{x^a} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \{ -2x^{1-a}(y+1) \}$$

$$\Rightarrow \frac{6(y+1)}{x^a} = -2(1-a)x^{-a}(y+1) \Rightarrow 6 = -2(1-a) \Rightarrow a = 4$$

مثال ۱۴. جواب عمومی معادله $x dy - y dx = (4x^3 + 9y^3)(4x dx + 9y dy)$ را بیابید.

حل: ابتدا طرفین معادله را بر عبارت $4x^3 + 9y^3$ تقسیم می‌کنیم، از این رو داریم:

$$4x dx + 9y dy = \frac{x dy - y dx}{(4x^3 + 9y^3)} = \frac{x dy - y dx}{4x^3 \left(1 + \frac{9y^3}{4x^3} \right)} = \frac{\frac{x dy - y dx}{x^3}}{4 \left[1 + \left(\frac{3y}{2x} \right)^3 \right]}$$

$$= \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{4 \left[1 + \left(\frac{3y}{2x} \right)^3 \right]} = \frac{\frac{3}{2} d\left(\frac{y}{x}\right)}{6 \left[1 + \left(\frac{3y}{2x} \right)^3 \right]} = \frac{d\left(\frac{3y}{2x}\right)}{6 \left[1 + \left(\frac{3y}{2x} \right)^3 \right]} = \frac{1}{6} d \left[\tan^{-1} \left(\frac{3y}{2x} \right) \right]$$

می‌بینیم معادله به فرم زیر در می‌آید. لذا با انتگرال‌گیری از طرفین آن داریم:

$$2d(x^3) + \frac{9}{2}d(y^3) = \frac{1}{6}d \left[\tan^{-1} \left(\frac{3y}{2x} \right) \right] \Rightarrow 12d(x^3) + 27d(y^3) = d \left[\tan^{-1} \left(\frac{3y}{2x} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \int 12d(x^3) + \int 27d(y^3) = \int d \left[\tan^{-1} \left(\frac{3y}{2x} \right) \right] + C \Rightarrow 12x^3 + 27y^3 = \tan^{-1} \left(\frac{3y}{2x} \right) + C$$

نکته

اگر معادله خطی بر حسب y به صورت $y' + p(x)y = q(x)$ باشد، آنگاه با انتخاب عامل

انتگرال‌ساز $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ ، جواب عمومی آن به فرم $y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int q(x)\mu(x)dx + C \right)$ می‌باشد.

نکته

اگر $q(x) = 0$ باشد، در این صورت معادله خطی $y' + p(x)y = q(x)$ تبدیل به معادله جداشدنی می‌شود.

از این رو برای حل آن داریم:

$$\begin{aligned} y' + p(x)y = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \\ \Rightarrow \ln y = -\int p(x)dx + C' &\Rightarrow y(x) = e^{-\int p(x)dx + C'} \Rightarrow y(x) = e^{C'} e^{-\int p(x)dx} \\ e^{C'} = C &\Rightarrow y(x) = C e^{-\int p(x)dx} \end{aligned}$$

مثال ۱۵. جواب عمومی معادله $(1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{1+x^2}$ را بیابید.

حل: با نوشتن معادله به صورت $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ در می‌یابیم، معادله خطی مرتبه اول است از این رو عامل انتگرال‌ساز و در نهایت جواب عمومی آن به فرم زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\ln(1+x^2)} \Rightarrow \mu(x) = (1+x^2) \\ y(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \left(\int q(x)\mu(x)dx + C \right) = \frac{1}{(1+x^2)} \left[\int (1+x^2) \frac{1}{(1+x^2)^2} dx + C \right] \\ &= \frac{1}{(1+x^2)} \left[\int \frac{1}{(1+x^2)} dx + C \right] = \frac{\tan^{-1} x + C}{1+x^2} \end{aligned}$$

مثال ۱۶. جواب خصوصی معادله $(\cos y)y' + \sin y = x+1$ را تحت شرایط اولیه

$$y(0) = \frac{\pi}{6}$$

حل: با قرار دادن $u = \sin y$ و از آنجا $u' = (\cos y)y'$ در معادله خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u' + u &= x+1 \\ \mu(x) &= e^{\int p(x)dx} = e^{\int dx} = e^x \Rightarrow \mu(x) = e^x \end{aligned}$$

$$u(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int q(x) \mu(x) dx + C \right) = \frac{1}{e^x} \left(\int (x+1) e^x dx + C \right)$$

$$u = \sin y \\ \implies \sin y = x + Ce^{-x} \Rightarrow y = \sin^{-1} \left(x + Ce^{-x} \right) = e^{-x} \left(xe^x + C \right)$$

$$y(\cdot) = \frac{\pi}{e} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{e} = 0 + Ce^{\cdot} \Rightarrow C = \frac{1}{e} \Rightarrow y = \sin^{-1} \left(x + \frac{1}{e^x} \right)$$

مثال ۱۷. جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' + 2xy = -16x^r y^r$ را بیابید.

حل: با تقسیم طرفین معادله بر y^r و سپس با جانشینی $z = y^{-r}$ ، معادله دیفرانسیل خطی بر حسب Z به صورت زیر بدست می‌آید.

$$y^{-r} y' + 2xy^{-r} = -16x^r \xrightarrow{z=y^{-r}, z'=-ry^{-r}y'} z' - 4xz = 32x^r$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int -4x dx} = e^{-2x^r}$$

$$z(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int Q(x) \mu(x) dx + C \right] = \frac{1}{e^{-2x^r}} \left(\int 32x^r e^{-2x^r} dx + C \right)$$

$$z = y^{-r} \\ \implies y^{-r} = -8x^r - 4 + Ce^{-2x^r} \\ = e^{rx^r} \left(-8x^r e^{-rx^r} - 4e^{-rx^r} + C \right)$$

مثال ۱۸. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' - \frac{1}{x}y = (1 + \ln x)y^r$ را بیابید.

حل: با تقسیم طرفین معادله بر y^r و سپس با جانشینی $z = y^{-r}$ معادله دیفرانسیل خطی بر حسب Z به صورت زیر بدست می‌آید.

$$y^{-r} y' - \frac{1}{x} y^{-r} = 1 + \ln x \xrightarrow{z=y^{-r}, z'=-ry^{-r}y'} z' + \frac{r}{x} z = -r(1 + \ln x)$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\frac{r}{x} dx} = e^{r \ln x} = e^{\ln x^r} = x^r$$

$$z(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int Q(x) \mu(x) dx + C \right] = \frac{1}{x^r} \left(\int -rx^r (1 + \ln x) dx + C \right)$$

$$z = y^{-r} \\ \implies y^{-r} = -\frac{r}{3} x (1 + \ln x) + \frac{r}{9} x + \frac{C}{x^r} \\ = \frac{1}{x^r} \left(-\frac{r}{3} x^r (1 + \ln x) + \frac{r}{9} x^r + C \right)$$

نکته

برای حل معادلات دیفرانسیل به فرم $f'(y)y' + f(y)p(x) = q(x)f^n(y)$ که به معادله برنولی تعمیم یافته معروف است با قرار دادن $u(x) = f(y)$ و از آنجا $u' = f'(y)y'$ در معادله، می توان آن را به یک معادله برنولی برای تابع $u(x)$ به فرم $u' + p(x)u = q(x)u^n$ تبدیل نمود.

مثال ۱۹. جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' - xy \ln y = -xye^{-x^2}$ را بیابید.

حل: با نوشتن معادله به فرم $\frac{1}{y}y' - x \ln y = -xe^{-x^2}$ و قرار دادن $u = \ln y$ و از آنجا

$u' = \frac{y'}{y}$ معادله به معادله برنولی $u' - xu = -xe^{-x^2}u^2$ تبدیل می شود از این رو، با تقسیم

طرفین معادله بر u^2 و سپس با جانشینی $z = u^{-1} = x^{-1}$ خواهیم داشت:

$$u^{-2}u' - xu^{-1} = -xe^{-x^2} \xrightarrow[z' = -u^{-2}u']{z = u^{-1}} z' + xz = xe^{-x^2}$$

$$\mu(x) = \exp\{p(x)dx\} = e^{\int p(x)dx} = e^{\int xdx} = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$z(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int Q(x)\mu(x)dx + C \right] = e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(\int xe^{-x^2} e^{\frac{1}{2}x^2} dx + C \right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(\int xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx + C \right) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(-e^{-\frac{1}{2}x^2} + C \right)$$

$$u = \ln y \xrightarrow{\implies} \ln y = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{\left(C - e^{-\frac{1}{2}x^2} \right)}$$

$$z = u^{-1} = Ce^{\frac{1}{2}x^2} - e^{-x^2} \Rightarrow \frac{1}{u} = e^{\frac{1}{2}x^2} \left(C - e^{-\frac{1}{2}x^2} \right)$$

مثال ۲۰. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = x^2 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x^2}y^2$ را با فرض $y_1(x) = -x^2$

بیابید.

حل: با قرار دادن $y = -x^2 + \frac{1}{u}$ و از آنجا $y' = -2x - \frac{u'}{u^2}$ در معادله خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 -2x_1 - \frac{u'}{u^r} &= x^r + \frac{r}{x} \left(-x^r + \frac{1}{u} \right) - \frac{1}{x} \left(-x^r + \frac{1}{u} \right)^r \\
 \Rightarrow -2x_1 - \frac{u'}{u^r} &= x^r - 2x + \frac{r}{xu} - x^r + \frac{rx}{u} - \frac{1}{xu^r} \Rightarrow u' + \left(\underbrace{\frac{r}{x} + rx}_{p(x)} \right) = \frac{1}{x} \\
 &\quad q(x)
 \end{aligned}$$

معادله دیفرانسیل حاصله، خطی مرتبه اول با تابع $u(x)$ می‌باشد؛ از این رو داریم:

$$\begin{aligned}
 \mu(x) &= e^{\int p(x)dx} = e^{\int \left(\frac{r}{x} + rx \right) dx} = e^{r \ln x + x^r} = e^{r \ln x} e^{x^r} = x^r e^{x^r} \\
 u(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \left(\int q(x) \mu(x) dx + C' \right) = \frac{1}{x^r e^{x^r}} \left(\int x e^{x^r} dx + C' \right) \\
 &= \frac{1}{x^r e^{x^r}} \left(\frac{1}{r} e^{x^r} + C' \right) = \frac{e^{x^r} + rC'}{r x^r e^{x^r}} \\
 \frac{rC'}{e^{x^r} + C} &\xrightarrow{\quad} y(x) = -x^r + \frac{r x^r e^{x^r}}{e^{x^r} + C} \\
 y(x) = -x^r + \frac{1}{u(x)} &\Rightarrow y(x) = -x^r + \frac{1}{\frac{e^{x^r} + rC'}{r x^r e^{x^r}}}
 \end{aligned}$$

مثال ۲۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y = 2xy' + \tan^{-1}(xy'^r)$ را بیابید.

حل: با قرار دادن $y' = p$ و مشتق‌گیری از طرفین معادله نسبت به x داریم:

$$\begin{aligned}
 y &= 2xp + \tan^{-1}(xP^r) \Rightarrow y' = 2P + 2xP' + \frac{P^r + 2xPP'}{1 + x^r P^r} \\
 \frac{y'}{y} &= p \Rightarrow P = 2P + 2xP' + \frac{P(P + 2xP')}{1 + x^r P^r} \Rightarrow (P + 2xP') + \frac{P(P + 2xP')}{1 + x^r P^r} = \cdot \\
 (P + 2xP') \left(1 + \frac{P}{1 + x^r P^r} \right) &= \cdot \Rightarrow 2x \frac{dP}{dx} + P = \cdot \Rightarrow 2xdP = -Pd x \\
 \Rightarrow \int \frac{2dP}{P} &= \int -\frac{dx}{x} \Rightarrow 2 \ln P = -\ln x + \ln c \Rightarrow P^r x = c
 \end{aligned}$$

از این رو، با حذف P ، در دستگاه زیر جواب عمومی معادله بدست می‌آید.

$$\begin{cases} y = 2xp + \tan^{-1}(xP^r) \\ xP^r = c \end{cases} \Rightarrow y = 2x\sqrt{\frac{c}{x}} + \tan^{-1} c = 2\sqrt{cx} + \tan^{-1} c$$

مثال ۲۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y = y' \ln y'$ را بیابید.

حل: چون معادله بر حسب y قابل حل است پس با قرار دادن $y' = P$ و مشتق‌گیری از طرفین معادله نسبت به x داریم:

$$y = P \ln P \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dx} \ln P + \frac{dP}{dx} \Rightarrow dy = (\ln P + 1) dP$$

$$\xrightarrow[\frac{y'=P}{dy=Pdx}]{} P dx = (\ln P + 1) dP \Rightarrow \int dx = \int \frac{\ln P + 1}{P} dP$$

$$\Rightarrow x = \int \left(\frac{\ln P}{P} + \frac{1}{P} \right) dP + c = \frac{1}{2} \ln^2 P + \ln P + c$$

از این رو، جواب عمومی پارامتری معادله به فرم $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln^2 P + \ln P + c \\ y = P \ln P \end{cases}$ می‌باشد.

مثال ۲۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $(y' + 1)\sqrt{y} - (y + 1)\sqrt{y'} = 0$ را بیابید.

حل: چون معادله بر حسب y یا y' قابل حل نیست پس با انتخاب $y = e^{\tau t}$ ، $y' = e^{-\tau t}$ که به ارضاء معادله می‌انجامند، به معادله جدشدنی زیر خواهیم رسید.

$$y' = e^{-\tau t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-\tau t} \Rightarrow dx = \frac{dy}{e^{-\tau t}} \xrightarrow[\frac{y=e^{\tau t}}{dy=e^{\tau t} dt}]{} dx = \frac{e^{\tau t}}{e^{-\tau t}} dt$$

$$= \int dx = \int e^{\tau t} dt + c \Rightarrow x = \frac{1}{\tau} e^{\tau t} + c$$

از این رو، با حذف t در دستگاه زیر جواب عمومی معادله بدست می‌آید.

$$\begin{cases} y = e^{\tau t} \Rightarrow t = \frac{1}{\tau} \ln y \\ x = \frac{1}{\tau} e^{\tau t} + c \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{\tau} e^{\tau \ln y} + c \Rightarrow y^{\tau} = \tau x - \tau c$$

مثال ۲۴. جواب عمومی معادله $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$ را تعیین نموده، و پوش جواب عمومی را بیابید.

حل: معادله از نوع کلرو است و جواب عمومی آن به فرم $y = cx + \sqrt{1 - c^2}$ می‌باشد، از این رو، برای یافتن جواب غیرعادی معادله باید پوش جواب عمومی را بیابیم.

$$F_c = x - \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = 0 \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = x \Rightarrow c^2 = x^2(1-c^2) \Rightarrow c = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

با حذف پارامتر C بین دو رابطه فوق پوش جواب عمومی (جواب غیرعادی معادله) بدست می‌آید.

$$y = x \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) + \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2} = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow y^2 = 1+x^2 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$$

مثال ۲۵. ۱۰۰ میلی گرم از یک نوع مادهٔ رادیواکتیو در اختیار داریم پس از ۵ ساعت مقدار آن به ۷۶٫۹۱ میلی گرم می‌رسد.

الف) مقدار ماده را در زمان t بیابید. ب) نیمهٔ عمر آن را محاسبه کنید.

حل الف:

فرض کنید $y(t)$ جرم مادهٔ رادیواکتیو در زمان t و k ثابت تحلیل باشد، در این صورت طبق قانون تحلیل مواد رادیواکتیو می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-kt} \xrightarrow{y_0=100} y(t) = 100 e^{-kt} \\ y(5) &= 76.91 \Rightarrow 100 \cdot e^{-5k} = 76.91 \Rightarrow e^{-5k} = 0.7691 \Rightarrow Lne^{-5k} = Ln(0.7691) \\ \Rightarrow -5k Lne &= Ln(0.7691) \Rightarrow k = -\frac{Ln(0.7691)}{5} = 0.05251 \Rightarrow y(t) = 100 \cdot e^{-(0.05251)t} \end{aligned}$$

حل ب:

اگر نیمهٔ عمر مادهٔ رادیواکتیو را T بنامیم آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \frac{100}{2} &= 100 \cdot e^{-(0.05251)T} \Rightarrow 0.5 = e^{-(0.05251)T} \Rightarrow Lne^{-(0.05251)T} = Ln(0.5) \\ \Rightarrow -(0.05251)T &= Ln(0.5) \Rightarrow T = -\frac{Ln(0.5)}{0.05251} \approx 13.2. \end{aligned}$$

مثال ۲۶. اگر در زمان $t=0$ جسدی دارای دمای θ باشد و در زمان مرگ (t_d) دمای جسد θ_d با مقدار طبیعی $98/6$ درجهٔ فارینهایت یا 37 سانتیگراد باشد. آنگاه تخمین زمان مرگ را بیابید.

حل: با توجه به رابطهٔ $\theta(t) = T + ce^{-kt}$ و شرط اولیه $\theta(0) = \theta$ داریم:

$$\theta(0) = \theta \Rightarrow T + ce^0 = \theta \Rightarrow c = \theta - T \Rightarrow \theta(t) = T + (\theta - T)e^{-kt}$$

اما مقدار k نامعلوم است از این رو، می‌توان با اندازه‌گیری مجدد دمای بدن در زمان t_1 مقدار k را تعیین نمود. برای این منظور اگر $\theta(t_1) = \theta_1$ ، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}\theta(t_1) = \theta_1 &\Rightarrow T + (\theta - T)e^{-kt_1} = \theta_1 \Rightarrow (\theta - T)e^{-kt_1} = \theta_1 - T \\ \Rightarrow e^{-kt_1} &= \frac{\theta_1 - T}{\theta - T} \Rightarrow -kt_1 = \ln \frac{\theta_1 - T}{\theta - T} \Rightarrow k = -\frac{1}{t_1} \ln \frac{\theta_1 - T}{\theta - T}\end{aligned}$$

حال اگر دمای اولیه جسد $85^\circ F$ و دو ساعت بعد $74^\circ F$ و دمای محیط $68^\circ F$ باشد آنگاه:

$$k = -\frac{1}{t_1} \ln \frac{\theta_1 - T}{\theta - T} = -\frac{1}{2} \ln \frac{74 - 68}{85 - 68} \cong 0.05207 \text{ hr}^{-1}$$

با توجه به فرض مسئله $\theta(t_d) = \theta_d$ می‌باشد، از این رو، برای محاسبه تخمین زمان مرگ داریم:

$$k = -\frac{1}{t_d} \ln \frac{\theta_d - T}{\theta - T} = t_d = -\frac{1}{0.05207} \ln \frac{98/6 - 78}{85 - 68} \cong -1/129$$

پس جسد تقریباً یک ساعت و هشت دقیقه بعد از مرگ کشف شده است.

مثال ۲۷. مقدار انتگرال $I_\gamma = \int_0^\infty \sin x \cosh x dx$ را به کمک تبدیل لاپلاس بیابید.

حل: با توجه به رابطه $\int_0^\infty e^{-ax} f(x) dx = F(a)$ و خواص تبدیل لاپلاس داریم:

$$\begin{aligned}I_\gamma &= \int_0^\infty \sin x \cosh x dx = \left(L \left\{ \frac{e^x + e^{-x}}{2} \sin x \right\} \right) \Big|_s = 0 \\ &= \left(L \left\{ \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{1}{2} e^{-x} \sin x \right\} \right) \Big|_s = 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(s-1)^2 + 1} + \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right) \Big|_s = 0 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

● توابع ساین، کساین و نمائی

توابع ساین، کساین و نمائی را به ترتیب با نمادهای $Si(x)$ ، $Ci(x)$ ، $Ei(x)$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر بیان می‌کنند.

$$1) Si(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt \quad 2) Ci(t) = \int_t^\infty \frac{\cos t}{t} dt \quad 3) Ei(t) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$$

مثال ۲۸. اگر $Si(x)$ تابع ساین باشد، آنگاه ثابت کنید $L \left\{ \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \right\} = \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{1}{s}$

حل: فرض کنید $f(x) = Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ ، از این رو با انتخاب $L\{f(x)\} = F(s)$ داریم:

$$f(x) = Si(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow xf'(x) = \sin x \Rightarrow L\{xf'(x)\} = L\{\sin x\}$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow d(sf(s)) = -\frac{1}{s^r+1} ds$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{ds}(sF(s) - f(0)) = \frac{1}{s^r+1}$$

$$\Rightarrow \int d(sf(s)) = -\int \frac{1}{s^r+1} ds \Rightarrow sf(s) = \tan^{-1} s + C$$

اینک بنا بر قضیه مقدار اولیه داریم:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(0) = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} (\tan^{-1} s + C) = 0 \Rightarrow C = \tan^{-1} \infty = \frac{\pi}{2}$$

$$sf(s) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \tan^{-1} \frac{1}{s} \Rightarrow f(s) = L\left\{\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt\right\} = \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{1}{s}$$

مثال ۲۹. اگر $Ci(x)$ تابع کساین باشد، آنگاه ثابت کنید $L\left\{\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt\right\} = \frac{Ln(s^r+1)}{rs}$

حل: فرض کنید $f(x) = Ci(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$ ، از این رو با انتخاب $L\{f(x)\} = F(s)$ داریم:

$$f(x) = Ci(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{\cos x}{x} \Rightarrow xf'(x) = -\cos x \Rightarrow L\{xf'(x)\} = L\{-\cos x\}$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{ds}(sF(s) - f(0)) = -\frac{s}{s^r+1} \Rightarrow d(sF(s)) = \frac{s}{s^r+1} ds$$

$$\int d(sF(s)) = \int \frac{s}{s^r+1} ds \Rightarrow sF(s) = \frac{1}{r} Ln(s^r+1) + C$$

اینک بنابر قضیه مقدار نهایی داریم:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{r} Ln(s^r+1) + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$sF(s) = \frac{1}{r} Ln(s^r+1) + C \Rightarrow F(s) = L\left\{\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt\right\} = \frac{Ln(s^r+1)}{rs}$$

مثال ۳۰. اگر $Ei(x)$ تابع نمایی باشد، آنگاه ثابت کنید $L\left\{\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt\right\} = \frac{Ln(s+1)}{s}$

حل: فرض کنید $f(x) = Ei(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$ ، از این رو با انتخاب $L\{f(x)\} = F(s)$ داریم:

$$f(x) = Ei(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x} \Rightarrow xf'(x) = -e^{-x} \Rightarrow L\{xf'(x)\} = -L\{e^{-x}\}$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{ds}(sF(s) - f(0)) = -\frac{1}{s+1} \Rightarrow d(sF(s)) = \frac{1}{s+1} ds$$

$$\Rightarrow \int d(sF(s)) = \int \frac{1}{s+1} ds \Rightarrow sF(s) = Ln(s+1) + C$$

اینک بنابر قضیه مقدار نهایی داریم:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} Ln(s+1) + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$sF(s) = Ln(s+1) + C \Rightarrow F(s) = L\left\{\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt\right\} = \frac{Ln(s+1)}{s}$$

● توابع انتگرال سینوسی فرنه و کسینوسی فرنه

توابع انتگرال سینوسی فرنه و انتگرال کسینوسی فرنه را به ترتیب با نمادهای $S(x)$ و

$C(x)$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر بیان می‌کنند:

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t \, dt \quad ; \quad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t \, dt$$

مثال ۳۱. ثابت کنید: $\int_0^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

حل: فرض کنید $f(t) = \int_0^x \cos x \, dx$ باشد از این رو، بنا به تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$F(s) = L\{f(t)\} = L\left\{\int_0^\infty \cos x \, dx\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^\infty \cos x \, dx\right) dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st} \cos x \, dx\right) dt = \int_0^\infty \{\cos x\} dx = \int_0^\infty \frac{s}{s^2 + x^2} dx$$

اینک برای محاسبه این انتگرال، تغییر متغیر مثلثاتی $x = \sqrt{s} \sqrt{\tan \theta}$ را به کار می‌بندیم

و سپس با استفاده از رابطه خواهیم داشت:

$$x = \sqrt{s} \sqrt{\tan \theta} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{s} (1 + \tan^2 \theta)}{2\sqrt{\tan \theta}} d\theta$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \frac{s}{s^{\frac{1}{r}} + x^{\frac{1}{r}}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{r}} \left(\frac{s}{s^{\frac{1}{r}} + s^{\frac{1}{r}} \tan^{\frac{1}{r}} \theta} \cdot \frac{\sqrt{s}(1 + \tan^{\frac{1}{r}} \theta)}{r \sqrt{\tan \theta}} \right) d\theta = \frac{1}{r \sqrt{s}} \int_0^{\frac{\pi}{r}} \tan^{-\frac{1}{r}} \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{r \sqrt{s}} \int_0^{\frac{\pi}{r}} \tan^{-\frac{1}{r}} \theta \cos^{\frac{1}{r}} \theta d\theta = \frac{1}{r \sqrt{s}} \left(r \int_0^{\frac{\pi}{r}} \sin^{\left(\frac{1}{r}\right)-1} \theta \cos^{\left(\frac{r}{r}\right)-1} \theta d\theta \right) \\
 &= \frac{1}{r \sqrt{s}} \beta\left(\frac{1}{r}, \frac{r}{r}\right) = \frac{1}{r \sqrt{s}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \Gamma\left(\frac{r}{r}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{r \sqrt{s}} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{r}\right) \\
 &= \frac{1}{r \sqrt{s}} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{r}} = \frac{1}{r \sqrt{s}} (\pi \sqrt{r}) = \frac{(\pi \sqrt{r})}{r \sqrt{s}}
 \end{aligned}$$

اینک به دو طرف رابطه فوق عملگر L^{-1} را اعمال می‌کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 L\{f(t)\} &= \frac{\pi \sqrt{r}}{r \sqrt{s}} \Rightarrow f(t) = \frac{\pi \sqrt{r}}{r} L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{\pi \sqrt{r}}{r} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{r}}}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\pi \sqrt{r}}{r \sqrt{\pi} \sqrt{t}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \\
 \Rightarrow f(t) &= \int_0^{\infty} \cos t x^{\frac{1}{r}} dx = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \Rightarrow f(1) = \int_0^{\infty} \cos x^{\frac{1}{r}} dx = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\pi}{r}}
 \end{aligned}$$

مثال ۳۲. ثابت کنید:

$$\int_0^{\infty} \sin t^{\omega} dx = \left(\frac{\pi}{r \omega} \sec \frac{\pi}{r \omega} \right) \cdot \frac{t^{-\frac{1}{\omega}}}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)}$$

حل: فرض کنید $f(t) = \int_0^{\infty} \sin t^{\omega} dx$ باشد از این رو بنا به تعریف لاپلاس داریم:

$$\begin{aligned}
 F(s) &= L\{f(t)\} = L\left\{\int_0^{\infty} \sin t^{\omega} dx\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\int_0^{\infty} \sin t^{\omega} dx\right) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-st} \sin t^{\omega} dt\right) dx = \int_0^{\infty} L\{\sin t^{\omega}\} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\omega}}{s^{\frac{1}{r}} + x^{\frac{1}{r} \omega}} dx
 \end{aligned}$$

اینک برای محاسبه این انتگرال، تغییر متغیر مثلثاتی $x^{\omega} = s \tan \theta$ را به کار می‌بندیم و سپس با استفاده از رابطه خواهیم داشت:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\omega}}{s^{\frac{1}{r}} + x^{\frac{1}{r} \omega}} dx = \frac{1}{\omega s^{\frac{1}{r} - \frac{1}{\omega}}} \int_0^{\frac{\pi}{r}} \tan^{\frac{1}{\omega}} \theta d\theta = \frac{1}{\omega s^{\frac{1}{r} - \frac{1}{\omega}}} \int_0^{\frac{\pi}{r}} \sin^{\frac{1}{\omega}} \theta \cos^{-\frac{1}{\omega}} \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\omega s^{\frac{1}{1-\omega}}} \beta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\omega}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\omega}\right), \quad \left(\omega > 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\omega} < 1\right) \\
 &= \frac{1}{\omega s^{\frac{1}{1-\omega}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\omega}\right) \Gamma\frac{1}{2} - \frac{1}{2\omega}}{\Gamma(1)} \\
 &= \frac{1}{\omega s^{\frac{1}{1-\omega}}} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\omega}\right)\pi} = \frac{1}{\omega s^{\frac{1}{1-\omega}}} \cdot \frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2\omega}}
 \end{aligned}$$

اینک به دو طرف رابطه فوق عملگر L^{-1} را اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{\omega s^{\frac{1}{1-\omega}}} \cdot \frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2\omega}}\right\} = \frac{\pi}{\omega} \sec\frac{\pi}{2\omega} L^{-1}\left\{\frac{1}{\omega s^{\frac{1}{1-\omega}}}\right\} = \left(\frac{\pi}{\omega} \sec\frac{\pi}{2\omega}\right) \cdot \frac{t^{-\frac{1}{\omega}}}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)}$$

مثال ۳۳. معادله انتگرالی $y(x) + \int_0^x y(x-t)t \cos t dt = \sin x$ را حل نمائید.

حل: با توجه به قضیه تلفیق، از طرفین معادله انتگرال، تبدیل لاپلاس می گیریم.

$$L\{y(x)\} + L\left\{\int_0^x y(x-t)t \cos t dt\right\} = L\{\sin x\} \Rightarrow Y(s) + L\{y(x) * x \cos x\} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow Y(s) + Y(s) \left(-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2 + 1}\right)\right) = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow \left(1 + \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}\right) Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{s^2 + 3s^2}{(s^2 + 1)^2}\right) Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s^2 + 3)} = \frac{(s^2 + 3) - 2}{s^2(s^2 + 3)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2(s^2 + 3)} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2 + 3}\right)$$

اینک با اعمال عملگر L^{-1} به طرفین رابطه بالا داریم:

$$y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2 + 3}\right)\right\} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x$$

● معادله انتگرو دیفرانسیل

به هر معادله شامل متغیر مستقل x و متغیر وابسته y و انتگرال کانولوشن از نوع ولترا، و همچنین مشتق متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل را معادله انتگرو دیفرانسیل می‌گوییم. حال برای حل معادله، کافیهست از طرفین آن تبدیل لاپلاس بگیریم.

مثال ۳۴. معادله انتگرو دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'(x) = 2 \sin x + \int_0^x y(x-t) \cos t dt, \quad y(0) = 0$$

حل: باتوجه به قضیه تلفیق، از طرفین معادله انتگرو دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$L\{y'(x)\} = 2L\{\sin x\} + L\left\{\int_0^x y(x-t) \cos t dt\right\}$$

$$\Rightarrow sY(s) - y(0) = \frac{2}{s^2 + 1} + L\{y(x) * \cos x\}$$

$$\Rightarrow sY(s) = \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 1} Y(s) \Rightarrow \left(s - \frac{s}{s^2 + 1}\right) Y(s) = \frac{2}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{s^2}{s^2 + 1}\right) Y(s) = \frac{2}{s^2 + 1} \Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s^2} \Rightarrow y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = x^2$$

منابع

۱. آخوندی، محسن. معادلات دیفرانسیل و کاربردهای آن. تهران: فرهنگ روز، ۱۳۹۰.

۲. Boyce, W.E. and DiPrima, R.C. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. ۷thed, John Wiley and Sons. ۱۹۹۷.