

به نام پروردگار جان و خرد

ریاضیات مهندسی

هومن فتحعلیانی
مهدی یوسفوند



۱۳۹۷

سرشناسه : فتحعلیانی، هومن، ۱۳۶۱-
 عنوان و نام پدیدآور : ریاضیات مهندسی / تألیف: هومن فتحعلیانی، مهدی یوسف وند
 مشخصات نشر : ملایر، نشر کبریا، ۱۳۹۷.
 مشخصات ظاهری : ۲۴۵ ص،
 شابک ۲۰۰۰۰۰ ریال : ۲-۲۲-۸۸۸۸-۶۰۰-۹۷۸
 وضعیت فهرست نویسی : فیبا
 موضوع : ریاضیات مهندسی
 Engineering mathematics : موضوع
 موضوع: ریاضیات مهندسی —مسائل، تمرین ها و غیره
 موضوع: Engineering mathematics -- Problems, exercises, etc.
 شناسه افزوده : یوسف وند، مهدی، ۱۳۶۰-
 رده بندی کنگره : ۱۳۹۷ ۲۹ف/TA۳۳۰
 رده بندی دیویی : ۶۲۰/۰۰۱۵۱
 شماره کتابشناسی ملی : ۵۵۶۲۰۵۲



نشر کبریا

نام کتاب: ریاضیات مهندسی
 نویسنده: هومن فتحعلیانی، مهدی یوسف وند
 ناشر: انتشارات کبریا
 ویراستار: زاهره احمدی کندلان
 شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه
 تاریخ نشر: اول ۱۳۹۷
 چاپ: پیشگام
 قیمت: ۲۰۰۰۰ تومان
 شابک: ۲-۲۲-۸۸۸۸-۶۰۰-۹۷۸
 آدرس پخش: ملایر چهار راه خیام پاساژ قصرنور- کتابفروشی امیر کبیر (کبریا) تلفن ۰۸۱-۳۲۲۱۱۱۴۵
 حق چاپ برای نویسنده و ناشر محفوظ است.

مقدمه:

مجموعه حاضر، حاصل چندین سال تدریس برای دوره های کارشناسی و کارشناسی ارشد رشته های مختلف دانشگاه ها و مراکز آموزش عالی کشور است؛ از این رو با تلاشی مستمر و دقتی کافی و با لطف و عنایت خداوند متعال توانستیم کتابی جامع با عنوان ریاضیات مهندسی را تدوین و در اختیار دانشجویان عزیز قرار دهیم.

بهتر آن است که برای هر رشته، کتاب خاصی تدوین شود اما این کار با توجه به تعداد زیاد رشته ها، بسیار دشوار و پرهزینه می باشد؛ با این شرایط مؤلفان سعی کرده اند کتابی تدوین کنند که برای اکثر رشته ها قابل استفاده باشد.

شکی نیست که ریاضیات ابزار نیرومندی برای حل مسأله ها در زمینه های مختلف می باشد. در این خصوص یادگیری ریاضیات منوط به داشتن منابعی معتبر است که مباحث موردنظر را به خوبی پوشش داده و شامل مثال های متنوع و متعدد باشد.

همچنین در این مجموعه سعی کرده ایم ضمن ارائه مطالب به صورت ساده و روان با ذکر مثال های متنوع، دانشجویان را در درک بهتر مفاهیم یاری نماییم.

بی شک این اثر بدون اشکال نخواهد بود، لذا از همه صاحب نظران تقاضا داریم که با یادآوری ایرادها و ارائه پیشنهادها سازنده ما را مرهون لطف خود نمایند.

مؤلفان (پاییز ۱۳۹۷) Malayer@mail.com

فهرست

- فصل اول : اعداد مختلط ۱
- بخش اول : مفاهیم و تعاریف اولیه ۲
- اعمال جبری روی اعداد مختلط : □
 - ویژگی های اعمال جبری □
 - صفحه مختلط □
 - قرینه و مزدوج Z □
 - ویژگی های مزدوج □
 - قدر مطلق (نرم یا اندازه) Z □
 - ویژگی های قدر مطلق □
- بخش دوم: نمایش اعداد مختلط در دستگاه دکارتی و قطبی ۶
- فرمول اویلر □
 - آرگومان اصلی □
 - ضرب و تقسیم در مختصات قطبی □
- بخش سوم :توان ها و ریشه ها ۱۰
- □ توان های صحیح Z □ □
 - □ فرمول دموآور □ □
 - □ کاربردهای فرمول دمولار □ □
 - □ ریشه ها □ □
- بخش چهارم : حل معادلات مختلط ۱۴
- □ الف) حل معادلاتی به شکل $Z^n = Z$ □ □

□ □ $z^n + z^{n-1} + \dots + z + 1 = 0$ (ب) حل معادلاتی به شکل

□ □ $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^n = -a \leftarrow (z+a)^n + (z+b)^n = 0$ (ج) حل معادلاتی به شکل

□ □ $z^{2n} + az^n + b = 0$ (د) حل معادلاتی به شکل

۱۷..... بخش پنجم : منحنی ها و نواحی در صفحه مختلط

□ □ دوائر و قرص ها

۲۰..... فصل دوم : متغیرهای مختلط

۲۱..... بخش اول : مفاهیم مربوط به مجموعه ها در صفحه مختلط

□ □ مجموعه نقاط

□ □ همسایگی نقطه z_0

□ □ همسایگی محذوف نقطه z_0

□ □ نقطه حدی

□ □ نقطه داخلی

□ □ نقطه خارجی

□ □ نقطه مرزی

□ □ مرز S

□ □ متمم مجموعه S

□ □ مجموعه باز

□ □ مجموعه بسته

□ □ مجموعه همبند (مجموعه ای که یک تکه باشد)

□ □ مجموعه کراندار

□ □ مجموعه بی کران

ناحیه باز □ □

بستار مجموعه □ □

بخش دوم : متغیر و تابع مختلط ۲۴

یادآوری : تابع حقیقی f : □ □

تابع مختلط □ □

تابع تک مقداری □ □

تابع چند مقداری □ □

نگاشت □ □

بخش سوم : حد و پیوستگی و مشتق ۲۷

پیوستگی □ □

پیوستگی یکنواخت □ □

خواص مشتق □ □

بخش چهارم : توابع تحلیل و همساز ۳۱

نقطه تکین □ □

تابع تام □ □

معادلات کوشی ریمان □ □

معادلات کوشی ریمان در حالت قطبی □ □

معادله لاپلاس □ □

معادلات لاپلاس در حالت قطبی □ □

تابع همساز □ □

مزدوج همساز □ □

فصل سوم : توابع غیر جبری مقدماتی ۳۷

بخش اول : توابع نمایی، مثلثاتی و هذلولوی ۳۸

تابع نمایی □ □

خواص تابع نمایی □ □

حل معادله نمایی □ □

بخش دوم : توابع مثلثاتی ۴۰

بررسی تحلیلی بودن □ □

مشتق □ □

روابط مثلثاتی □ □

صفرهای $\sin z$ و $\cos z$ □ □

حل معادلات مثلثاتی □ □

توابع هذلولوی (هیپربولیک) □ □

مشتق □ □

صفرهای $\cosh z, \sinh z$ □ □

بخش چهارم : تابع لگاریتمی ۴۷

مقدار اصلی □ □

خواص $\ln z$ □ □

شاخه ها و مشتقات لگاریتم □ □

شاخه اصلی $\text{Ln} z$ □ □

بخش پنجم : توان های عمومی ۵۲

بخش ششم : توابع مثلثاتی و ارون ۵۴

توابع هذلولوی و ارون □ □

مشتق توابع مثلثاتی و هذلولوی و ارون □ □

بخش هفتم : نگاشت به وسیله توابع مقدماتی ۵۷

الف) نگاشت $W = az + b$ □ □

ب) نگاشت نمایی $W = e^z$: □ □

ج) نگاشت $w = \ln z$ □ □

د) تابع $W = Z^n$ □ □

ه) تابع $W = Z^{\frac{1}{n}}$ □ □

و) تابع $W = \frac{1}{Z}$ □ □

ز) $W = \sin Z$ □ □

بررسی تصاویر خطوط قائم $x = C_1$: □ □

فصل چهارم: انتگرال گیری در صفحه مختصات ۶۷

بخش اول : انتگرال خط در صفحه مختلط ۶۸

مسیر انتگرال گیری □ □

منحنی ساده (کمان جردن) □ □

محاسبه انتگرال خط □ □

خواص انتگرال خط □ □

مقدار کار انجام شده به وسیله نیروی F □ □

بخش دوم : قضیه کوشی-گورسا و نتایج آن ۷۴

قضیه کوشی □ □

نحوه تعیین جهت مثبت □ □

قضیه کوشی-گورسا □ □

نتایجی از قضیه کوشی_گورسا	۱۱
بخش سوم : فرمول انتگرال کوشی	۷۹
تعمیم فرمول انتگرال کوشی	۱۱
قضیه اساسی جبر	۱۱
قضیه ماکزیمم و مینیمم هنگ توابع	۱۱
فصل پنجم : سری مختلط، قضیه مانده ها و کاربرد آنها در حل انتگرال	۸۵
بخش اول : دنباله و سری های مختلط	۸۶
دنباله ها	۱۱
همگرایی	۱۱
سری ها	۱۱
همگرایی سری	۱۱
سری واگرا	۱۱
همگرایی یکنواخت	۱۱
قضیه (آزمون وایرستراس)	۱۱
قضیه : (مشتق گیری جمله به جمله از سری)	۱۱
قضیه : (انتگرال گیری جمله به جمله از سری)	۱۱
آزمون های همگرایی	۱۱
قضیه واگرایی	۱۱
آزمون ریشه	۱۱
آزمون مقایسه	۱۱
شعاع همگرایی_ ناحیه همگرایی	۱۱
بخش دوم : سری های تیلور و لوران	۹۵
قضیه تیلور	۱۱

دامنه همگرایی □ □

سری مک لورن □ □

بسط مک لورن چند تابع مهم □ □

سری $\text{Arctan } z$ □ □

سری لوران □ □

قضیه لوران □ □

برهان □ □ □

بخش سوم : تکین ها و مانده ها ۱۰۲

تعریف : صفر مرتبه m ام □ □ □

قضیه □ □ □

تکین □ □ □

تکین تنها □ □ □

انواع نقاط تکین تنها □ □ □

مرتبه قطب □ □ □

قطب ساده □ □ □

قضیه □ □ □

روش محاسبه مانده ($b1$) □ □ □

قضیه مانده ها □ □ □

بخش چهارم : کاربرد قضیه مانده ها در حل انتگرال های حقیقی ۱۰۸

الف) محاسبه $\int_{-p}^p R(\cos q, \sin q) dq$ □ □ □

ب) محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} dx$ □ □ □

ج) محاسبه انتگرال های $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} \sin ax dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} \cos ax dx$ ۱۱۶

لم جردن ۱۱۷

فصل ششم : (آخرین مباحث توابع مختلط) نگاشت همدیس و کاربردهای آن ۱۱۶

بخش اول : نگاشت همدیس ۱۱۷

محک همدیس بودن یک نگاشت ۱۱۷

تبدیلات کسری خطی ۱۱۷

حالت های خاص تبدیل موبیوس ۱۱۷

تعیین یک تبدیل دوخطی خاص ۱۱۷

قضیه ۱۱۷

بخش دوم : نگاشت های کسری خاص و کاربرد نگاشت های همدیس ۱۲۱

کاربردهای نگاشت همدیس ۱۲۱

(۱) مسئله دریگله ۱۲۱

(۲) نگاشت ژوکوفسکی ۱۲۱

ویژگی های این نگاشت ۱۲۱

فصل هفتم : آنالیز فوریه و کاربردهای آن ۱۲۵

بخش اول : تعاریف و مفاهیم اولیه ۱۲۶

تابع متناوب ۱۲۶

تابع تکه ای پیوسته ۱۲۶

بخش دوم : سری فوریه ۱۲۸

فرمول های اویلر ۱۲۸

سری فوریه توابع زوج و فرد ۱۲۸

الف) سری فوریه کسینوسی ۱۲۸

.....	ب) سری فوریه سینوسی	۱۱۱
.....	بسط نیم دامنه	۱۱۱
.....	بسط نیم دامنه کسینوسی	۱۱۱
.....	بسط نیم دامنه سینوسی	۱۱۱
..... ۱۳۶	بخش سوم : سری فوریه نمایی	
.....	با استفاده از رابطه اوایلر	۱۱۱
.....	خواص سری فوریه	۱۱۱
.....	ضرایب سری فوریه کانولوشن متناوب	۱۱۱
..... ۱۳۹	بخش چهارم : قضایای مربوط به سری فوریه	
.....	قضیه (قضیه دیریکله)	۱۱۱
.....	مشتق گیری از سری فوریه	۱۱۱
.....	انتگرال گیری از سری فوریه	۱۱۱
.....	کاربردهای سری فوریه	۱۱۱
..... ۱۴۴	بخش پنجم : سری فوریه دوگانه	
.....	بسط فوریه با ثابت نگه داشتن γ	۱۱۱
.....	سری فوریه مربوط به هریک ضرایب	۱۱۱
..... ۱۴۶	فصل هشتم : انتگرال فوریه	
..... ۱۴۷	بخش اول : انتگرال فوریه و خواص آن	
.....	قضیه (انتگرال فوریه)	۱۱۱
.....	انتگرال فوریه توابع زوج و فرد	۱۱۱
.....	انتگرال فوریه نمایی	۱۱۱
..... ۱۵۲	بخش دوم : تبدیل فوریه و خواص آن	
.....	جدول تبدیلات فوریه	۱۱۱

تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی	۱۱۱
تبدیل فوریه کسینوسی $(F(a))$	۱۱۱
تبدیل فوریه سینوسی $(F(a))$	۱۱۱
جدول تبدیلات سینوسی فوریه	۱۱۱
جدول تبدیلات کسینوسی فوریه	۱۱۱
خواص تبدیل فوریه	۱۱۱
بخش سوم : تبدیل فوریه مشتق	۱۵۸
قضیه	۱۱۱
تبدیل فوریه کانولوشن دو تابع	۱۱۱
قضیه کانولوشن	۱۱۱
کاربرد قضیه کانولوشن	۱۱۱
اتحاد پارسوال	۱۱۱
حالت های خاص اتحاد پارسوال	۱۱۱
قضیه	۱۱۱
برهان	۱۱۱
قضیه	۱۱۱
بخش چهارم : کاربردهای تبدیل فوریه	۱۶۲
حل مسئله بامقدارمرزی بااستفاده ازتبدیل فوریه	۱۱۱
فصل نهم : معادلات دیفراسیل با مشتقات جزئی	۱۶۶
بخش اول : مفاهیم اولیه و حل برخی از معادلات دیفراسیل جزئی ساده	۱۶۷
معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی	۱۱۱
مرتبه	۱۱۱

درجه □ □ □

معادله خطی □ □ □

معادله شبه خطی □ □ □

حل برخی از معادلات دیفراسیل جزئی ساده □ □ □

روش دالامبر □ □ □

بخش دوم : طبقه بندی معادلات خطی مرتبه دو و شکل متعارف آنها ۱۷۰

معادلات خطی مرتبه دوم □ □ □

طبقه بندی معادلات خطی مرتبه دو □ □ □

شکل متعارف (کانونی) معادله □ □ □

معادلات مشخصه □ □ □

مراحل حل معادله □ □ □

بخش سوم : حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به روش جداسازی متغیرها ۱۷۵

حل معادله به روش جداسازی □ □ □

مراحل حل □ □ □

حل معادله موج یک بعدی □ □ □

معادلات انتشار گرما □ □ □

مساله انتشار گرما برای یک میله با طول نامتناهی □ □ □

معادله لاپلاس □ □ □

این درس برای رشته های فنی و مهندسی بسیار کاربری است و به سه بخش عمده تقسیم بندی میشود.

(۱) توابع مختلط و کاربردها

(۲) سری های فوریه

(۳) حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جرئی

فصل اول : اعداد مختلط

بخش اول : مفاهیم و تعاریف اولیه

بخش دوم : نمایش اعداد مختلط در دستگاه دکارتی و قطبی

بخش سوم : توان ها و ریشه ها

بخش چهارم : حل معادلات مختلط

بخش پنجم : منحنی ها و نواحی در صفحه مختلط

بخش اول : مفاهیم و تعاریف اولیه

ابتدا اعداد مختلط را به عنوان مجموعه ای بزرگتر از اعداد حقیقی بررسی میکنیم :

✓ معادله $x + 1 = 0$ در دستگاه اعداد طبیعی جواب ندارد.

✓ معادله $2x + 1 = 0$ در دستگاه اعداد صحیح جواب ندارد.

✓ معادله $x^2 - 2 = 0$ در دستگاه اعداد گویا جواب ندارد.

✓ معادله $x^2 + 1 = 0$ در دستگاه اعداد حقیقی جواب ندارد.

مجموعه اعداد مختلط را بصورت زیر تعریف میکنیم :

$$C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$z = (x, y) \quad x = \text{Re}z \quad y = \text{Im}z$$

فرض کنیم $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$:

دو عدد مختلط z_1, z_2 باهم برابرند اگر $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$ باشد.

$i = (0, 1)$ را یک عدد موهومی گوئیم که در آن 0 قسمت حقیقی و 1 قسمت موهومی آن است.

اعمال جبری روی اعداد مختلط :

• جمع و ضرب :

اگر $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ باشد :

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

$$\Rightarrow x = (x, 0) \quad (1)$$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

از رابطه (1) و اینکه $y = (0, y)$ نتیجه میگیریم : $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) \Rightarrow z = x + iy$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow z = iy \\ y = 0 \Rightarrow z = x \end{cases}$$

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1 \quad \text{و} \quad i = 1$$

جمع و ضرب با استفاده از نمایش $z = x + iy$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

تفریق و تقسیم :

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثال : مقدار $\frac{8+3i}{9+2i}$ را محاسبه کنید.

$$\frac{8+3i}{9+2i} * \frac{9-2i}{9-2i} = \frac{66+43i}{81+4} = \frac{66}{85} + i \frac{43}{85}$$

ویژگی های اعمال جبری :

✓ قوانین جابجایی :

$$1) z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$2) z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

✓ قوانین شرکت پذیری :

$$3) (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$4) (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

✓ توزیع پذیری :

$$5) Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1Z_2 + Z_1Z_3$$

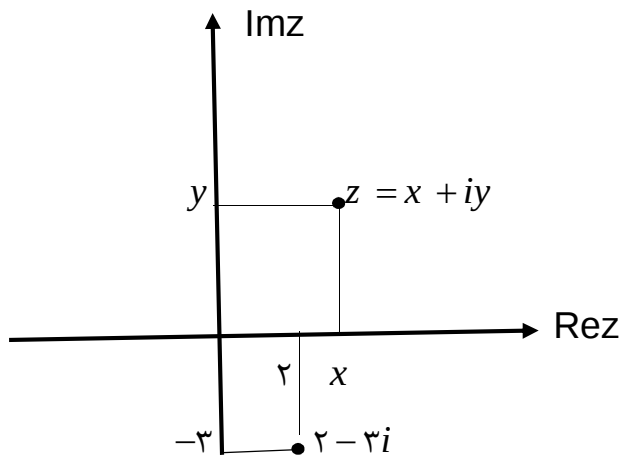
$$6) Z + 0 = 0 + Z = Z$$

✓ عضو خنثی جمع :

$$7) Z \cdot 1 = Z$$

✓ عضو خنثی ضرب :

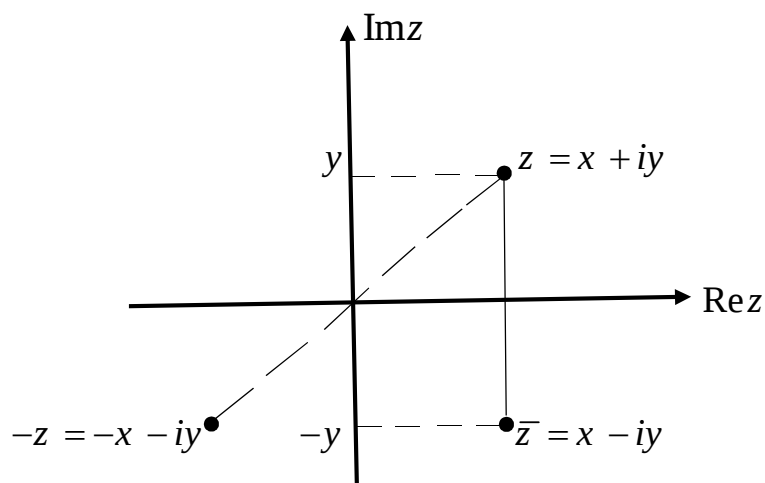
صفحه مختلط :



قرینه و مزدوج Z :

✓ مزدوج : قرینه نسبت به محور X ها .

✓ قرینه : قرینه نسبت به مبدا مختصات.



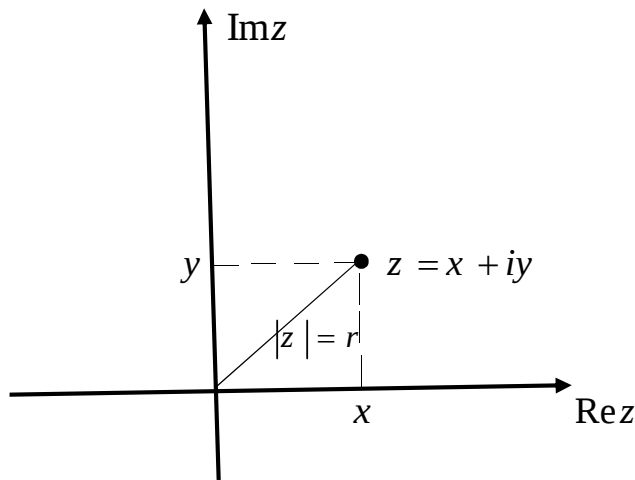
ویژگی های مزدوج :

$$۱) \overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad ۲) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$۳) \overline{(\bar{z})} = z \qquad ۴) z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x \rightarrow x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$۵) z - \bar{z} = 2iy \rightarrow y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \qquad ۶) \operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z \rightarrow \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$$

قدر مطلق (نرم یا اندازه) z :



$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ویژگی های قدر مطلق :

$$۱) |z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \qquad ۲) z\bar{z} = |z|^2$$

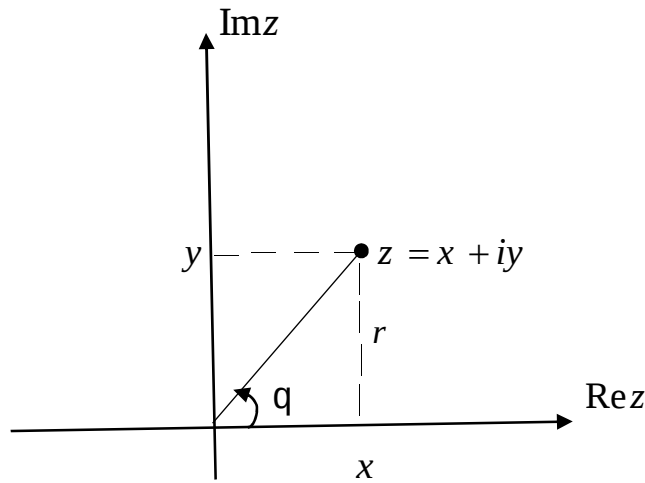
$$۳) |\bar{z}| = |z| \qquad ۴) |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$۵) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad ۶) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{نامساوی مثلثی}$$

تمرین : با استفاده از ۶ ثابت کنید؟

$$۷) \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$$

بخش دوم: نمایش اعداد مختلط در دستگاه دکارتی و قطبی:



$$\left. \begin{aligned} z &= r(\cos q + i \sin q) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan q &= \frac{y}{x} \rightarrow q = \text{Arc tan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \right\} z = \cdot$$

$\sin = \frac{y}{r} \rightarrow y = r \sin q$, $\cos = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \cos q$

قراردادها:

۱) $\cos q + i \sin q = \text{cis } q$

۲) $z = r(\cos q + i \sin q) = r \text{cis } q$

مثال:

$$\sqrt{2} \text{cis} = \sqrt{2}(\cos q + i \sin q)$$

فرمول اوایلر: از ریاضی ۱ سری ماکلورن $\cos, \sin x, e^x$ بصورت زیر تعریف می شود.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

فصل اول (بخش دوم _ نمایش اعداد مختلط در دستگاه دکارتی و قطبی)

اگر در هر یک از فرمول های بالا قرار دهیم $x = iq$ و نتیجه را مرتب کنیم :

$$e^{iq} = \cos q + i \sin q = cis q$$

بارها و بارها در سری فوریه و مشتقات جزئی به این فرمول برخورد خواهیم کرد.

$$-1 = e^{ip} \quad \text{مثال :}$$

توضیح : -1 را به عنوان عددی مختلط در نظر بگیرید، بصورت $rcis q$ می نویسیم، $r = 1$ می شود و q آن برابر p می شود، پس $-1 = e^{ip}$ ، $-1 = 1(\cos p + i \sin p)$.

$$i = e^{i \frac{p}{2}} \quad \text{مثال :}$$

توضیح : i را به عنوان یک عدد مختلط در نظر می گیریم، نرم i میشود 1 ، $q = \frac{p}{2}$ میشود بنابراین i میشود

$$e^{i \frac{p}{2}} = 1 cis \frac{p}{2}$$

آرگومان اصلی :

$$-p < q \leq p \rightarrow q = Arg z = z$$

$$arg z = Arg z + 2kp \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

و اگر $2kp$ هم به آن اضافه شود بقیه زوایا متناظر به آن عدد مختلط هم بدست می آید.

تذکره: هنگام محاسبه q باید دقت کنیم که z در کدام ربع واقع شده است.

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$arg z$	q	$p - q$	$p + q$	$-q$
$Arg z$	q	$p - q$	$-(p - q)$	$-q$

مثال: عدد مختلط زیر را به قطبی نمایش دهید.

$$z = 1 + i \quad \text{الف)}$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, q = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{p}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{p}{4} + i\sin\frac{p}{4}\right) \quad (\text{ربع اول})$$

$$\text{ب) } z = -1 - i$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad q = \text{Arc tan}\left(\frac{-1}{-1}\right) = \text{Arctan}(1)$$

اما چون y, x هر دو منفی میباشند پس q در ربع سوم قرار میگیرد، لذا:

$$q = p + \frac{p}{4} = \frac{5p}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5p}{4} + i\sin\frac{5p}{4}\right)$$

ضرب و تقسیم در مختصات قطبی:

$$z_1 = r_1(\cos q_1 + i\sin q_1) \quad \text{و} \quad z_2 = r_2(\cos q_2 + i\sin q_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [(\cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2) + i(\sin q_1 \cos q_2 + \cos q_1 \sin q_2)]$$

از بسط $\sin, \cos$ در q

$$\rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(q_1 + q_2) + i\sin(q_1 + q_2))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \arg(z_1 z_2) = q_1 + q_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \\ |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \end{cases}$$

$$\text{برای تقسیم فرض کنیم: } z = \frac{z_1}{z_2} \rightarrow z_1 = z z_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \arg(z z_2) = \arg z + \arg z_2 = \arg z_1 \Rightarrow \arg z = \arg z_1 - \arg z_2 \\ |z z_2| = |z| |z_2| = |z_1| \Rightarrow |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z = \arg z_1 - \arg z_2 \Rightarrow \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \\ |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \end{cases}$$

در نتیجه :
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(q_1 - q_2) + i \sin(q_1 - q_2))$$

تذکر : $Arg(z_1 z_2) \neq Arg z_1 + Arg z_2$

مثال : $z_1 = -1$ و $z_2 = i$

$$Arg(z_1 . z_2) = Arg(-i) = -\frac{p}{2}$$

$$Arg(z_1) + Arg(z_2) = p + \frac{p}{2} = \frac{3p}{2}$$

بخش سوم :توان ها و ریشه ها

توان های صحیح z :

$$z = r(\cos q + i \sin q)$$

$$z^2 = r^2(\cos(q + q) + i \sin(q + q)) = r^2(\cos 2q + i \sin 2q)$$

$$z^3 = r^3(\cos 3q + i \sin 3q)$$

⋮

$$z^n = r^n(\cos nq + i \sin nq) = r^n \operatorname{cis} nq$$

فرمول دموآور :

$$|z| = r = 1 \Rightarrow (\cos q + i \sin q)^n = \cos nq + i \sin nq = \operatorname{cis} nq$$

کاربردهای فرمول دمولار :

الف) بسط $\cos nq$ و $\sin nq$ بر حسب $\cos q$ و $\sin q$.

مثال : نشان دهید $\cos 3q = 4 \cos^3 q - 3 \cos q$ و $\sin 3q = 3 \sin q - 4 \sin^3 q$

حل :

$$(\cos q + i \sin q)^3 = \cos 3q + i \sin 3q \quad (1)$$

از اتحاد مکعب مجموع:

$$\rightarrow (\cos q + i \sin q)^3 = \cos^3 q + i^3 \sin^3 q + 3 \cos^2 q (i \sin q) + 3 \cos q (i^3 \sin^2 q)$$

$$= \cos^3 q - i \sin^3 q + 3i \cos^2 q \sin q - 3 \cos q \sin^2 q$$

$$= (\cos^3 q - 3 \cos q \sin^2 q) + i(3 \cos^2 q \sin q - \sin^3 q)$$

$$= \cos^3 q - 3 \cos q (1 - \cos^2 q) + i(3(1 - \sin^2 q) \sin q - \sin^3 q)$$

$$= 4 \cos^3 q - 3 \cos q + i(3 \sin q - 4 \sin^3 q) \quad (2)$$

طبق روابط (1) و (2) دو رابطه مهم زیر به می آید :

$$\underline{(۱), (۲)} = \begin{cases} \cos r q = r \cos^r q - r \cos q \\ \sin r q = r \sin q - r \sin^r q \end{cases}$$

ب) محاسبه مقدار Z^n .

مثال : مطلوب است محاسبه $(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i})^{۱۰}$.

حل : ابتداء عدد مختلط را به صورت قطبی می نویسیم :

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \times \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1+2\sqrt{3}i-3}{4} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1, \tan q = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\rightarrow q = \arctan(-\sqrt{3}) = p - \frac{p}{3} = \frac{2p}{3}$$

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \cos \frac{2p}{3} + i \sin \frac{2p}{3}$$

نمایش قطبی :

$$\rightarrow (\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i})^{۱۰} = (\cos \frac{2p}{3} + i \sin \frac{2p}{3})^{۱۰} = \cos \frac{2 \cdot 10 p}{3} + i \sin \frac{2 \cdot 10 p}{3}$$

مثال : مقدار $(1-i)^{۱۶}$ را بیابید.

$$z = 1-i \Rightarrow r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, q = \arctan(\frac{-1}{1}) = \frac{-p}{4} \text{ (ربع چهارم)}$$

$$(1-i) = \sqrt{2}(\cos(\frac{-p}{4}) + i \sin(\frac{-p}{4}))$$

$$\rightarrow (1-i)^{۱۶} = (\sqrt{2})^{۱۶} (\cos(\frac{-۱۶p}{4}) + i \sin(\frac{-۱۶p}{4})) = ۲^۸ (\cos(-۴p) + i \sin(-۴p)) = ۲۵۶$$

ریشه ها :

ریشه n ام Z :

Z ، n مقدار متمایز از W را اختیار میکند.

$$W^n = Z \rightarrow (\forall Z \neq 0)$$

$$W = \sqrt[n]{Z} \quad (W \text{ ریشه } n \text{ام } Z \text{ میباشد})$$

$$W = R(\cos j + i \sin j)$$

$$W^n = R^n(\cos n j + i \sin n j) = r(\cos q + i \sin q)$$

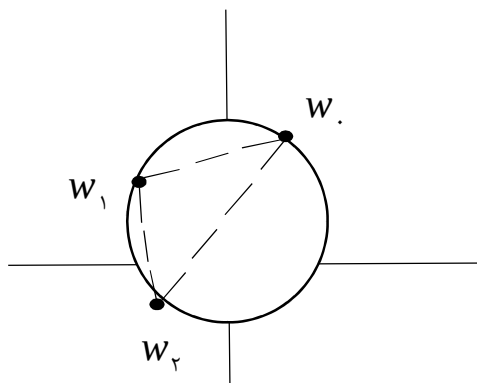
با مساوی قرار دادن قدر مطلق:

$$\begin{cases} R^n = |Z| = r \rightarrow R = \sqrt[n]{r} \\ n j = q + 2k\pi \rightarrow j = \frac{2k\pi + q}{n} (k = 0, 1, \dots, n-1) \end{cases}$$

در نتیجه :

$$\begin{cases} W = \sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{2k\pi + q}{n} + i \sin \frac{2k\pi + q}{n} \right) \\ (k = 0, 1, \dots, n-1) \end{cases}$$

ریشه های n ام Z روی دایره ای به شعاع W و مرکز مبدأ مختصات واقع بوده و رئوس یک n ضلعی منتظم می باشد.



مثال : ریشه های سوم $- \lambda i$ را به دست آورید.

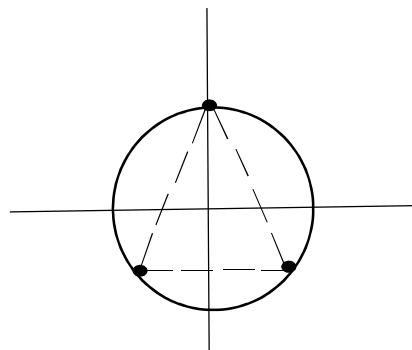
$$z = -\lambda i \quad r = \sqrt[3]{64} = 4, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{-4}{0}\right) = \frac{-\pi}{2}$$

$$w_k = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{3} \right) \quad (k=0,1,2)$$

$$\forall k = 0 \rightarrow w_0 = 4 \left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \right) = \sqrt{3} - i$$

$$\forall k = 1 \rightarrow w_1 = 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2i$$

$$\forall k = 2 \rightarrow w_2 = 4 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = -\sqrt{3} - i$$



ریشه n ام واحد :

$$w^n = 1 \Rightarrow w = \sqrt[n]{1} \quad \text{ریشه } n \text{ام واحد}$$

$$w^n = z$$

$$z = 1 \Rightarrow r = 1, \varphi = \arctan 0 = 0 \Rightarrow w_k = 1 \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k=0,1,\dots,n-1)$$

ریشه های n ام واحد روی دایره واحد واقع بوده و رئوس یک n ضلعی منتظم هستند.

بخش چهارم : حل معادلات مختلط :

الف) حل معادلاتی به شکل $z^n = z$.

(۱) نوشتن شکل قطبی z (محاسبه q, r).

(۲) قرار دادن q, r در فرمول.

مثال : معادله $z^4 - 1 = i$ را حل کنید.

$$z^4 = 1 + i \quad r = \sqrt{2} \quad q = \frac{p}{4}$$

$$z_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{2kp + \frac{p}{4}}{4} + i \sin \frac{2kp + \frac{p}{4}}{4} \right), (k=0, 1, 2, 3)$$

$$k=0 \dots \rightarrow z_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{p}{16} + i \sin \frac{p}{16} \right)$$

$$k=1 \dots \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{9p}{16} + i \sin \frac{9p}{16} \right)$$

$$k=2 \dots \rightarrow z_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{17p}{16} + i \sin \frac{17p}{16} \right)$$

$$k=3 \dots \rightarrow z_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{25p}{16} + i \sin \frac{25p}{16} \right)$$

ب) حل معادلاتی به شکل $z^n + z^{n-1} + \dots + z + 1 = 0$:

تصادف هندسی با تعداد متناهی جمله و قدر نسبت z . $1 + z + z^2 + \dots + z^n \rightarrow$

$$1 + z + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \Rightarrow (z - 1)(1 + z + \dots + z^n) = z^{n+1} - 1$$

(۱) ضرب طرفین معادله در $z - 1$ و تبدیل آن به معادله $z^{n+1} - 1 = 0$

(۲) حل معادله $z^{n+1} = 1$ طبق قسمت (الف)

توجه داشته باشید برای حل اینگونه معادلات باید همه توان ها پشت سرهم و موجود باشند. به مثال زیر توجه کنید.

مثال : مصلوب است حل معادله $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

$$(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0 \rightarrow z^5 - 1 = 0 \rightarrow z^5 = 1$$

$$\rightarrow z_k = \left(\cos \frac{2kp}{5} + i \sin \frac{2kp}{5} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 4$$

$$k = 0 \rightarrow z_0 = 1$$

$$k = 1 \rightarrow z_1 = \cos \frac{2p}{5} + i \sin \frac{2p}{5}$$

⋮

$$\left(\frac{x+a}{x+b} \right)^n = -a \leftarrow (z+a)^n + (z+b)^n = 0$$

(ج) حل معادلاتی به شکل

مثال : ریشه های معادله $(z+1)^5 + (z-1)^5 = 0$ را به دست آورید.

$$\left(\frac{z+1}{z-1} \right)^5 = -1 \quad \frac{z+1}{z-1} = t \rightarrow \begin{cases} t^5 = -1 = \cos p + i \sin p \\ z = \frac{t+1}{t-1} * \end{cases}$$

$$t_k = \left(\cos \frac{2kp+p}{5} + i \sin \frac{2kp+p}{5} \right) \quad (k=0, 1, \dots, 5)$$

$$* \rightarrow z = \frac{\left(\cos \frac{2kp+p}{5} + i \sin \frac{2kp+p}{5} \right) + 1}{\left(\cos \frac{2kp+p}{5} + i \sin \frac{2kp+p}{5} \right) - 1}$$

(د) حل معادلاتی به شکل $z^{2n} + az^n + b = 0$:

(۱) تغییر متغیر $z^n = t$ و نوشتن معادله به صورت $t^2 + at + b = 0$.

(۲) حل معادله درجه دو و بدست آوردن t .

(۳) جایگزینی $z^n = t$ و حل این معادله طبق قسمت (الف).

مثال : مطلوبست حل معادله $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$.

$$z^3 = t \rightarrow z^6 = t^2 \rightarrow t^2 + 2t + 2 = 0.$$

$$\rightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$z^3 = t \rightarrow z^3 = -1 \pm i$$

$$z = -1 + i \rightarrow r = \sqrt{2}, \quad \phi = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{3} \right), \quad (k=0,1,2)$$

$$z^3 = -1 - i \rightarrow r = \sqrt{2}, \quad \phi = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}{3} \right)$$

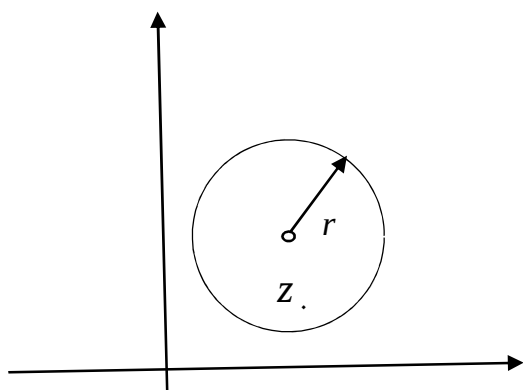
بخش پنجم : منحنی ها و نواحی در صفحه مختلط :

یکی از بخش هایی که بعدا درانتگرال ختلط بکاربرده میشود، دوايرومنحنی ها درحالتهای مختلط و اینکه به چه صورت نمایش داده میشوند.

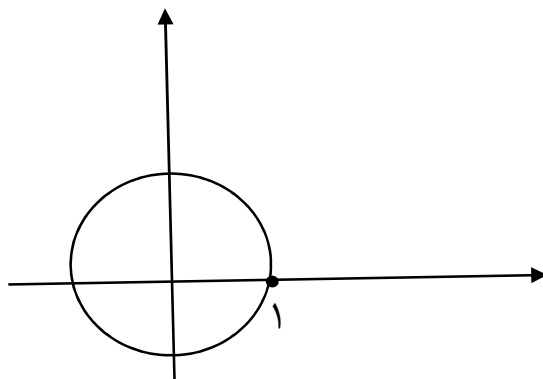
دواير وقرص ها :

(۱) فاصله بين دو نقطه Z و Z_0 را بصورت $|Z - Z_0|$ مینویسیم.

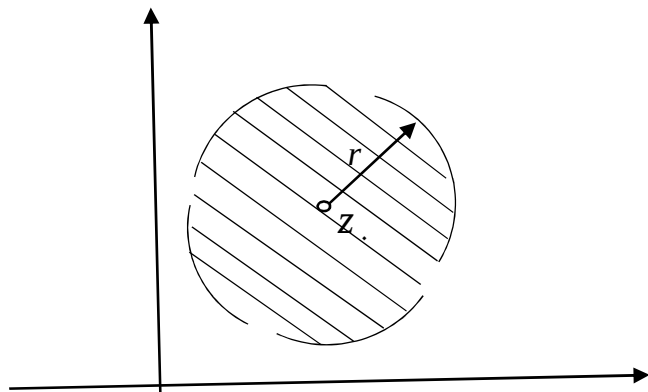
(۲) دایره C به مرکز Z_0 و شعاع r نیز بصورت $|Z - Z_0| = r$.



(۳) دایره واحد $|Z| = 1$.



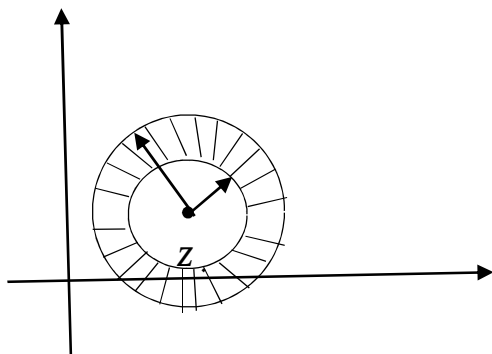
(۴) قرص مستدیرباز (همسایگی) $|Z - Z_0| < r$.



(۵) قرص مستدیر بسته $|z - z_0| \leq r$ یعنی هم داخل و هم روی محیط دایره جزو این ناحیه است.

(۶) نقاط بیرونی دایره $|z - z_0| > r$ منظور همه نقاط بیرون دایره است.

(۷) طوق باز: ناحیه بین دو دایره هم مرکز به شعاع های r_1 و r_2 ($r_1 < r_2$) $r_1 < |z - z_0| < r_2$.



مثال : مکان هندسی نقاطی مانند z را طوری پیدا کنید که در نامساوی زیر صدق کند.

الف) $|z - 3 + i| \leq 4$

حل : داخل و روی دایره به شعاع ۴ و مرکز $3 - i$

ب) $|z| < 1$

حل : نقاط درونی دایره ای واحد (قرص یکه باز)

ج) $|z| \leq 1$

حل : دایره واحد و نقاط درونی آن (قرص یکه بسته)

مثال : مکان هندسی معادله $|z + i| + |z - i| = 1$ را تعیین کنید. z هایی که در این معادله صدق می کنند از نظر هندسی چه شکلی ایجاد می کنند.)

حل :

$$z = x + iy$$

$$|x + i(y+1)| + |x + i(y-1)| = 1$$

حل تعریف نرم را برای هردو مینویسیم :

$$\Rightarrow \sqrt{x^r + (y+1)^r} + \sqrt{x^r + (y-1)^r} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^r + (y+1)^r} = 1 - \sqrt{x^r + (y-1)^r}$$

طرفین به توان دو :

$$x^r + (y+1)^r = 1 + x^r + (y-1)^r - 2\sqrt{x^r + (y-1)^r}$$

دسته بندی :

$$4y - 1 = -2\sqrt{x^r + (y-1)^r}$$

طرفین به توان دو :

$$(4y-1)^r = 4(x+2y-1)^r \rightarrow 4x^r - 12y^r = 3 \quad (\text{نمایش هذلولی})$$

مثال : مطلوب است مکان هندسی $\text{Im}(\frac{z}{z}) = 1$.

حل :

$$\frac{z}{z} \times \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{z\bar{z}}{|z|^r}$$

$$z = x + iy \Rightarrow \frac{z\bar{z}}{|z|^r} = \frac{z(x-iy)}{x^r + y^r} = \frac{zx}{x^r + y^r} + i \frac{-zy}{x^r + y^r}$$

$$\text{Im}(\frac{z}{z}) = 1 \Rightarrow \frac{-zy}{x^r + y^r} = 1 \Rightarrow x^r + y^r = -zy \Rightarrow x^r + y^r + zy + 1 = 1 \Rightarrow x^r + (y+1)^r = 1$$

دایره به مرکز $(0,1)$ و شعاع ۱.

فصل دوم: متغیرهای مختلط

بخش اول : مفاهیم مربوط به مجموعه ها در صفحه مختلط

بخش دوم : متغییر و تابع مختلط

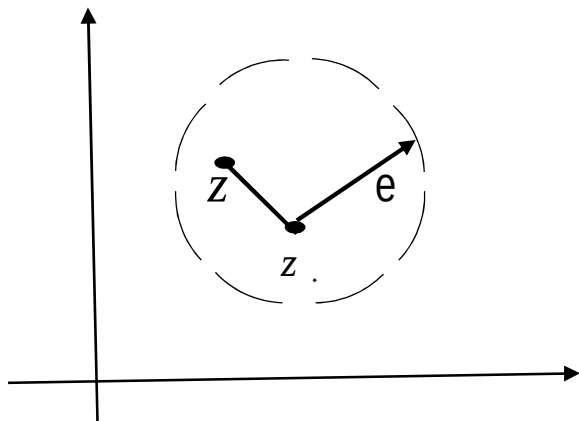
بخش سوم : حد و پیوستگی و مشتق

بخش چهارم : توابع تحلیلی و همساز

بخش اول : مفاهیم مربوط به مجموعه ها در صفحه مختلط

مجموعه نقاط : مجموعه ای شامل تعداد متناهی و یا نامتناهی نقطه. مثلاً جواب های یک معادله درجه دوم، نقاط داخل یک دایره و...

همسایگی نقطه z_0 : شعاع همسایگی e و $\{z \mid |z - z_0| < e\}$



همسایگی محذوف نقطه z_0 : همه نقاط همسایگی z_0 به جز خود z_0 : $(0 < |z - z_0| < e)$

نقطه حدی : نقطه ای که هر همسایگی محذوف آن شامل حداقل یک نقطه S باشد.

مثال :

$$1) \left\{1, \frac{1}{3}, \dots\right\} \rightarrow z_0 = 0 \quad 2) \left\{\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \dots\right\} \rightarrow z_0 = 0$$

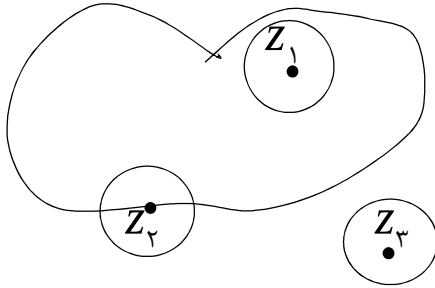
نقطه داخلی : نقطه ای که یک همسایگی از آن موجود باشد که هیچ نقطه S را دربر ندارد.

مثال : هر نقطه همسایگی $|z - z_0| < e$ یک نقطه داخلی است.

نقطه خارجی : نقطه ای که یک همسایگی از آن موجود باشد که هیچ نقطه S را دربر ندارد.

نقطه مرزی : نقطه ای که هر همسایگی آن هم شامل نقاط داخل S و هم شامل نقاط خارج S است.

مرز S : مجموعه تمام نقاط مرزی S .



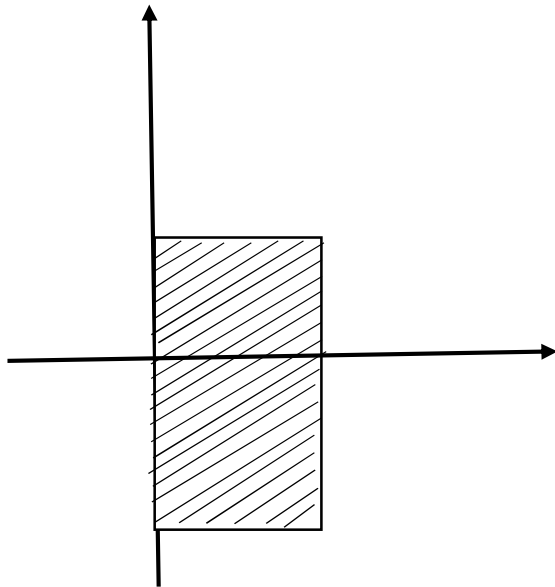
مثال: نقاط روی دایره $|z - z_1| = e$ نقاط مرزی روی همسایگی $|z - z_1| < e$ هستند.

متمم مجموعه S : مجموعه تمام نقاطی از صفحه که متعلق به S نیست.

مجموعه باز: مجموعه ای که هر همسایگی از هر نقطه اش کاملاً درون آن قرار بگیرد.

مثال: نقاط درونی یک دایره: $|z - z_1| < r$.

نقاط نیم صفحه راست: $\text{Re } z = x > 0$.



(مفهوم مجموعه های باز بسته همان دانسته های قبلی شما نسبت به این موضوع است و تعمیمی از همان مفهوم است.)

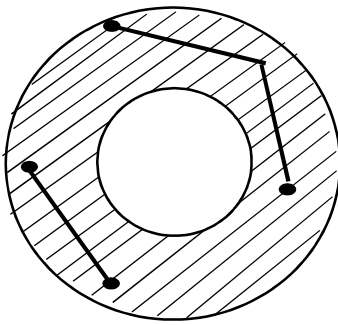
مجموعه بسته: مجموعه ای شامل تمام نقاط مرزی خود (متمم یک مجموعه باز).

مثال ۱: نقاط داخل و روی یک دایره $|z - z_1| \leq r$.

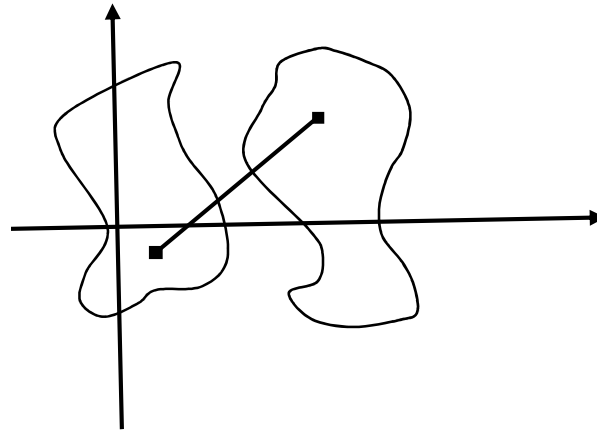
مثال (۲) : نقاط بین دو دایره $r_1 \leq |z| \leq r_2$.

مجموعه همبند (مجموعه ای که یک تکه باشد) : اگر دو نقطه دلخواه از آن مجموعه را

بتوان توسط تعدادی پاره خط دویه دو متوالی پشت سرهم، به هم وصل کرد و تمام پاره خط ها داخل ناحیه باشند.



همبند



ناهمبند

مجموعه کراندار: همه نقاط آن کمتر از یک عدد (M معین شده) است.

$$\exists M ; \forall z \in S \quad |z| < M$$

مجموعه بی کران : مجموعه ای که کراندار نباشد.

مثال (۱): $|z| < 1$ → (داخل دایره واحد) کراندار

مثال (۲): $|z| \leq 1$ → (روی دایره و داخل دایره واحد) کراندار

مثال (۳): $\text{Re } z \geq 0$ → بی کران

ناحیه باز: به همبند و باز می گویند.

بستار مجموعه : مجموعه بسته که شامل تمام نقاط مجموعه و نقاط حدی آن است (همواره بسته است).

بخش دوم : متغیر و تابع مختلط

یادآوری : تابع حقیقی f :

(در رابطه زیر S مجموعه ای از اعداد حقیقی است)

$$f : S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) \quad (\text{مقدار } f \text{ در } x)$$

تابع مختلط : اگر S یک مجموعه از اعداد مختلط باشد:

$$f : S \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto w = f(z) \quad (\text{مقدار } f \text{ در } z)$$

در این رابطه z دویبعدی می باشد. (یک قسمت حقیقی و یک قسمت موهومی است پس $z = x + iy$)

همچنین دامنه و برد هر دو دویبعدی میباشند پس نمودار باید چهاربعدی باشد، اما دامنه را در یک دستگاه دویبعدی جداگانه و برد را نیز در یک دستگاه دویبعدی جداگانه رسم می کنیم.

پس:

$$w = f(z) = u + iv$$

w وابسته به $z = x + iy$ ، (u, v) توابعی از (x, y) هستند:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

اگر به جای x, y از مختصات قطبی r, q استفاده شود :

$$z = re^{iq} = r(\cos q + i \sin q)$$

$$f(z) = u(r, q) + iv(r, q)$$

مثال : اگر $f(x) = z^2$ آنگاه: $f(x) = x^2$ (با $f(x) = x^2$ که نشان دهنده سهمی بود خیلی فرق دارد).

$$z = x + iy \rightarrow f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$$

$$\rightarrow u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy$$

$$z = re^{iq} \rightarrow f(z) = (re^{iq})^{\frac{1}{\sqrt{r}}} = r^{\frac{1}{\sqrt{r}}} e^{i\frac{q}{\sqrt{r}}} = r^{\frac{1}{\sqrt{r}}} \cos \frac{q}{\sqrt{r}} + i (r^{\frac{1}{\sqrt{r}}} \sin \frac{q}{\sqrt{r}})$$

$$\rightarrow u(r,q) = r^{\frac{1}{\sqrt{r}}} \cos \frac{q}{\sqrt{r}} \quad , \quad v(r,q) = r^{\frac{1}{\sqrt{r}}} \sin \frac{q}{\sqrt{r}}$$

تابع تک مقداری : به ازای هر z در دامنه، یک و فقط یک مقدار به w نسبت داده میشود.

تابع چند مقداری : تابعی که برای بعضی یا تمام مقادیر z ، مقادیر مختلفی را اختیار می کند.

مثال : فرض کنید $z = re^{iq}$ در این صورت :

$$\begin{cases} f(z) = z^{\frac{1}{\sqrt{r}}} = \pm \sqrt{r} e^{i\frac{q}{\sqrt{r}}}, (-p < q \leq p) \\ f(z) = \sqrt{r} e^{i\frac{q}{\sqrt{r}}}, (r > 0, -p < q \leq p) \end{cases}$$

نگاشت :

$$w = f(z) \quad (z \text{ با نگاشت } f \text{ نگاشته می شود به } w)$$

$$\text{نقطه } w = f(z) \rightarrow \text{تصویر نقطه } z \text{ از دامنه } S$$

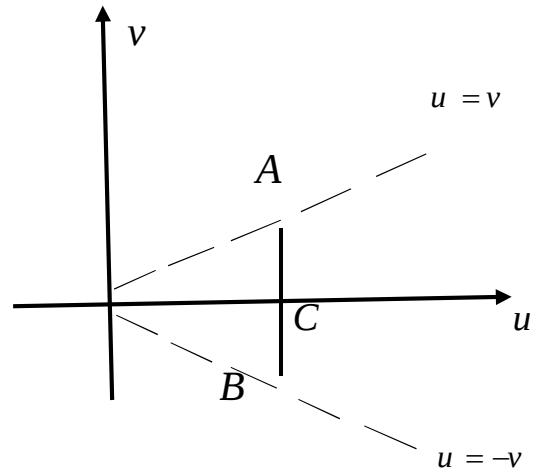
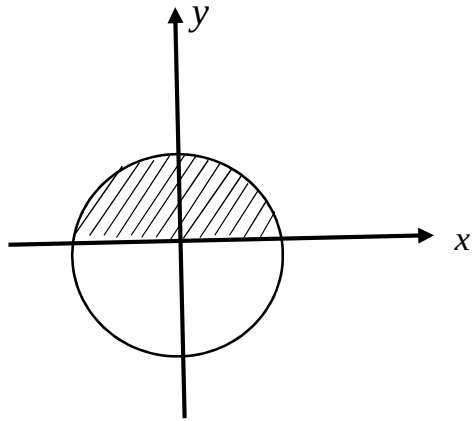
$$\text{تصویر } T \rightarrow \text{مجموعه تصاویر همه نقاط مجموعه } T$$

$$\text{برد } f \rightarrow \text{تصویر تمام دامنه } S$$

مثال : تابع $w = \sqrt{x^2 + y^2} - iy$ هر دایره به مرکز مبدأ در صفحه z را به چه مجموعه ای در صفحه w تصویر میکند.

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad v = -y$$

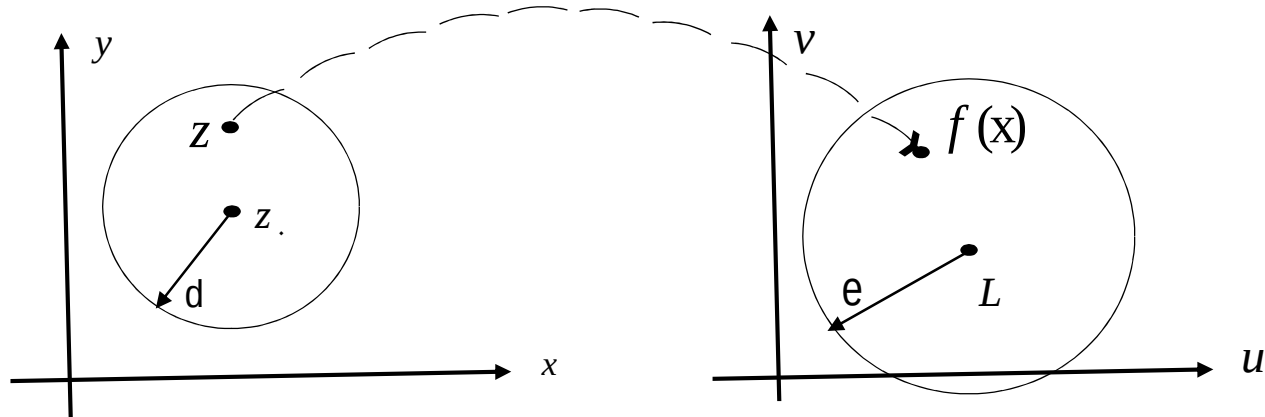
$$x^2 + y^2 = c^2 \quad , \quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad u = c \quad , \quad -c \leq v \leq c$$



بخش سوم : حد و پیوستگی و مشتق

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)) = L$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists d > 0 ; \quad 0 < |z - z_0| < d \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon$$



مثال : با تعریف، نشان دهید $\lim_{z \rightarrow 2i} (z + 3i) = 5$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists d > 0 ; \quad 0 < |z - 2i| < d \Rightarrow |z - 2i| < \epsilon \Rightarrow |(z + 3i) - 5i| < \epsilon$$

$$|z + 3i - 5i| = |z - 2i| < \epsilon \Rightarrow d < \epsilon$$

تذکر : در حالت حقیقی، x فقط در امتداد خط حقیقی به x میل می کرد. در این جا z میتواند از هرامتدادی در صفحه مختلط به z میل کند.

نکته : برای اثبات عدم وجود حد، کافی است حد را از دو مسیر متفاوت وقتی $Z = Z_0$ محاسبه کرده، نشان دهیم این دو حد با هم برابر نیستند.

پیوستگی : تابع $f(z)$ را در $Z = Z_0$ پیوسته می گوئیم هرگاه :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (2)$$

(1) $f(z_0)$ تعریف شده باشد.

توجه : $f(z) = u + iv$ در $z_0 = (x_0, y_0)$ پیوسته است اگر و تنها اگر u, v در (x_0, y_0) پیوسته باشند.

$$\text{مثال : پیوستگی تابع } f(z) = \begin{cases} \frac{z}{\bar{z}}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases} \text{ را در } z = 0 \text{ بررسی کنید.}$$

$$z = x + iy$$

$$x = 0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + iy}{x - iy} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{iy}{-iy} = -1$$

$$y = 0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + iy}{x - iy} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

پس حد تابع در فر وجود ندارد در نتیجه تابع در صفر پیوسته نیست.

پیوستگی یکنواخت : تابع پیوسته $f(z)$ در ناحیه D پیوسته یکنواخت است هرگاه :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists d > 0 ; \quad \forall z_1, z_2 \in D \quad |z_1 - z_2| < d \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$$

مثال : نشان دهید تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ روی $D = \{z \in S \mid 0 < |z| < 1\}$ پیوسته یکنواخت نیست ولی روی $D' = \{z \in S \mid |z| > 1\}$ پیوسته یکنواخت است.

$$z_1 = \frac{d}{1+\epsilon}, \quad z_2 = d \quad \text{چون :}$$

$$\Rightarrow |z_2 - z_1| = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \quad d < d \Rightarrow \left| \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right| = \frac{\epsilon}{d} > \epsilon$$

f پیوسته یکنواخت نیست $\rightarrow 0 < d < 1$

$$|z| > 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right| = \left| \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} \right| < |z_2 - z_1| < \epsilon \Rightarrow d = \epsilon$$

مشتق :

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \Rightarrow \text{f در } z_0 \text{ مشتق پذیر است}$$

$$\Delta z = z - z_0 \rightarrow z = z_0 + \Delta z$$

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

نکته : برای اثبات عدم وجود مشتق مانند حد، مقدار حد فوق را از دو مسیر متفاوت محاسبه کرده و نشان می دهیم این دو مقدار با هم برابر نیستند.

مثال : نشان دهید تابع $f(z) = \bar{z}$ مشتق پذیر نیست.

$$y = y_0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) - i(y - y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = 1$$

$$x = x_0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{(x - x_0) - i(y - y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = -1$$

پس مشتق پذیر نیست.

خواص مشتق :

$$1) (f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$$

$$2) (f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$$

$$3) \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2} \quad (g(z) \neq 0)$$

$$4) (f(g(z)))' = g'(z).f'(g(z))$$

تذکر : در برخی قضایای کاربردی مانند قضیه (اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد و بر (a, b) مشتق پذیر باشد، حداقل

نقطه ای مانند C وجود دارد که مشتق در نقطه C می شود $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ مقدار میانگین در اینجا برقرار

نیست.

$$f'(c) = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}$$

مثال : فرض کنیم $f(z)=e^{iz}$ و $0 \leq z \leq 2\pi$ در اینصورت $f'(z)$ هیچگاه صفر نمی شود.

$$|f'(z)| = |ie^{iz}| = 1$$

اما :

$$f(2\pi) - f(0) = 0$$

اگر قضیه مقدار میانگین برقرار باشد، با توجه به عبارت مقابل یک c باید وجود داشته باشد که $f'(c) = 0$

شود اما هیچگاه مشتق تابع مختلط صفر نمیشود.

بخش چهارم : توابع تحلیلی و همساز

تابع f در دامنه D تحلیلی است هرگاه f در تمام نقاط D تعریف شده و مشتق پذیر باشد.

تابع f در نقطه z تحلیلی است هرگاه در z و یک همسایگی از آن مشتق پذیر باشد.

نقطه تکین : نقطه ای که تابع در آن تحلیلی نیست.

تابع تام : تابعی که در تمام نقاط تحلیلی است. مثل تابع چند جمله ای :

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$

نکته : برای بدست آوردن نقطه تکین تابع، کافی است دامنه آن را بدست آوریم.

الف) $f(z) = \frac{1}{z} \rightarrow z = 0$

ب) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \rightarrow z^2 + 1 = 0 \rightarrow z = \pm i$

ج) $f(z) = \frac{iz}{z(z^2 + 1)} \rightarrow z(z^2 + 1) = 0 \Rightarrow z = 0, z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i$

دارای سه نقطه تکین است

معادلات کوشی ریمان : مشتق توابع مختلط شبیه توابع حقیقی بودند اما بعضی از آنها مانند ریاضی (۱) نیست

مثل $f(z) = \bar{z}$ و $f(z) = |z|$ و $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ پس برای پیدا کردن مشتق این نوع توابع مختلط از یک محک

استفاده می کنیم که به آن محک کوشی ریمان می گوییم.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$y = y_0 \Rightarrow f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[u(x, y_0) + iv(x, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[u(x, y_0) - u(x_0, y_0)]}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[v(x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2) \Rightarrow X = X \text{ بصورت مشابه:}$$

$$\underbrace{(1), (2)}_{\text{معادلات کوشی ریمن}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right.$$

معادلات کوشی ریمن شرط لازم و حتی تحت شرایطی، کافی برای تحلیلی بودن تابع می باشد.

قضیه: (شرط کافی برای مشتق پذیری).

تابع $f(z) = u + iv$ در Z تحلیلی است هرگاه:

(1) مشتقات جزئی u, v نسبت به x, y در Z موجود و پیوسته باشد.

(2) تابع در $Z = Z$ معادلات کوشی ریمن صدق کند.

مثال: آیا تابع $f(z) = z^3$ تحلیلی است؟

$$f(z) = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(i^2y^2) + i^3y^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

$$u = x^3 - 3xy^2, \quad v = 3x^2y - y^3$$

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y$$

$$u_y = -6xy = -v_x$$

← معادلات کوشی ریمن برقرار است

پس تابع در همه جا مشتق پذیر ولذا تحلیلی است.

مثال زیر را بررسی میکنیم، که معادلات کوشی ریمن صدق می کند اما مشتق پذیر نیست.

$$\text{مثال: تابع } f(z) = \begin{cases} \frac{(1+i)}{x^2 + y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases} \text{ در } z=0 \text{ مشتق پذیر نیست، اما معادلات کوشی ریمن در این نقطه}$$

برقرار است.

$$u = v = \frac{xy}{x^r + y^r}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{z=\cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{u(x, \cdot) - u(\cdot, \cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\cdot - \cdot}{x} = \cdot$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{z=\cdot} = \lim_{y \rightarrow \cdot} \frac{v(\cdot, y) - v(\cdot, \cdot)}{y - \cdot} = \lim_{y \rightarrow \cdot} \frac{\cdot - \cdot}{y} = \cdot$$

$$\rightarrow u_x = v_y$$

به همین ترتیب $u_y = -v_x$ اما :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \frac{(1+i)(y^r - rx^ry)}{(x^r + y^r)^r}, & z \neq \cdot \\ \cdot, & z = \cdot \end{cases}$$

$$x = \cdot \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \cdot} u_x = \lim_{y \rightarrow \cdot} \frac{(1+i)(y^r - rx^ry)}{(x^r + y^r)^r} = 1+i$$

$$y = \cdot \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \cdot} u_x = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{(1+i)(y^r - rx^ry)}{(x^r + y^r)^r} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\cdot}{x^r} = \cdot$$

چون حد آن در نقطه صفر وجود ندارد، پس u_x در $z = \cdot$ پیوسته نیست.

مثال : مشتق پذیری تابع $f(z) = z \operatorname{Re} z$ را بررسی کنید.

$$f(z) = (x+iy)x = x^r + i(xy)$$

$$u = x^r, \quad v = xy$$

$$\begin{cases} u_x = rx, v_y = x \\ u_y = \cdot, v_x = y \end{cases}$$

$$u_x = v_y \Rightarrow rx = x \Rightarrow x = \cdot$$

$$u_y = -v_x \Rightarrow -y = \cdot \Rightarrow y = \cdot$$

$$\Rightarrow z = \cdot$$

(فقط در $z = \cdot$ مشتق پذیر است).

معادلات کوشی ریمان در حالت قطبی :

$$z = r(\cos q + i \sin q) \quad , \quad x = r \cos q \quad , \quad y = r \sin q$$

$$f(z) = u(r, q) + i v(r, q)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial q}$$

$$u_r = u_x \cos q + u_y \sin q \quad , \quad u_q = -u_x r \sin q + u_y r \cos q \quad (1)$$

$$v_r = v_x \cos q + v_y \sin q \quad , \quad v_q = -v_x r \sin q + v_y r \cos q$$

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

$$\Rightarrow v_r = -u_y \cos q + u_x \sin q, v_q = u_y r \sin q + u_x r \cos q \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \begin{cases} r u_r = v_q \\ u_q = -r v_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_q \\ v_r = -\frac{1}{r} v_q \end{cases}$$

قضیه (شرط کافی برای مشتق پذیری):

تابع $f(z) = u(r, q) + i v(r, q)$ در Z تحلیلی است هرگاه :

(1) مشتقات جزئی u, v نسبت به r, q در Z موجود و پیوسته باشد.

(2) تابع در $Z = Z$ در صورت قطبی بودن معادلات کوشی ریمان صدق میکند.

$$f'(z) = (u_r + i v_r)(\cos q - i \sin q)$$

مثال : مشتق تابع $f(z) = \ln r + i q$, $0 < q < 2\pi$ و $r > 0$ را بیابید.

$$u = \ln r \quad , \quad v = q$$

$$f'(z) = (\cos q - i \sin q) \left(\frac{1}{r} + i(\cdot) \right) = \frac{1}{r} e^{-iq} = \frac{1}{r e^{iq}} = \frac{1}{z}$$

معادله لاپلاس :

در اصطلاح میگوییم توابع u, v هارمونیک یا همساز هستند

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\begin{cases} \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ \nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \end{cases}$$

معادلات لاپلاس در حالت قطبی :

$$\text{قضیه :} \begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \\ v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0 \end{cases}$$

اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در D دامنه تحلیلی باشد، آنگاه u, v در لاپلاس صدق کرده و دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در D میباشد.

تذکر : عکس قضیه بالا برقرار نیست یعنی ممکن است u, v در معادله لاپلاس صدق کند ولی تابع f تحلیلی نباشد.
مثال :

$$f(z) = (x - y) + i(y + x)$$

$$u_x = 1, \quad v_y = 1 \implies u_x \neq v_y$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

مثال بالا نشان میدهد u, v هارمونیک (همساز) هستند، اما طبق معادلات کوشی ریمان نه مشتق پذیر است و نه تحلیلی.

تابع همساز : هر تابع حقیقی که در معادله لاپلاس صدق کند.

مزدوج همساز : اگر u تابعی همساز باشد، v را مزدوج همساز u می گویند هرگاه $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد.

مثال : نشان دهید $u = x^2 - y^2 - y$ یک تابع همساز است، مزدوج همساز آن را بنویسید.

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, u_{xx} = 2 \\ u_y &= -2y - 1, u_{yy} = -2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

پس همساز است.

$$v_y = u_x = 2x \quad y \text{ انتگرال نسبت به } y \rightarrow v = \int 2x dy = 2xy + h(x) \quad (*)$$

$$v_x = -u_y \Rightarrow 2y + h'(x) = 2y + 1 \Rightarrow h'(x) = 1 \Rightarrow h(x) = x + c$$

$$\rightarrow * \quad v = 2xy + x + c$$

پس :

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + c)$$

فصل سوم :توابع غیر جبری مقدماتی

بخش اول : توابع نمایی

بخش دوم : توابع مثلثاتی

بخش سوم : توابع هذلولوی

بخش چهارم : تابع لگاریتمی

بخش پنجم : توان های عمومی

بخش ششم : توابع وارون مثلثاتی و وارون هذلولوی

بخش هفتم : نگاشت به وسیله توابع مقدماتی

بخش اول : توابع نمایی، مثلثاتی و هذلولوی

تابع نمایی :

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = u + iv$$

$$u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$$

e^z در معادلات کوشی - ریمنان صدق می کند :

$$\begin{cases} u_x = v_y = e^x \cos y \\ u_y = -v_x = -e^x \sin y \end{cases}$$

پس :

(۱) e^z تابعی تام (و تحلیلی) است.

(۲) اگر $z = x$ رفتار e^z مانند رفتار e^x است.

خواص تابع نمایی :

$$۱) (e^z)' = e^z, \quad ۲) e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

$$۳) \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}, \quad ۴) e^0 = 1 \Rightarrow \frac{1}{e^z} = e^{-z}$$

$$۵) e^{\bar{z}} = \overline{(e^z)} \quad , \quad ۶) (e^z)^n = e^{nz}$$

حکم زیر نیز همواره برقرار است :

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$$

$$e^z = e^x \cdot e^{iy}, \quad e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$|e^{iy}| = |\cos y + i \sin y| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$$

$$\Rightarrow |e^z| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = e^x \neq 0 \Rightarrow |e^z| \neq 0 \Rightarrow e^z \neq 0$$

تابع e^z خواصی دارد که با e^x مشترک نیست :

(۱) e^z میتواند مقادیر منفی اختیار کند :

$$e^{ip} = \cos p + i \sin p = -1$$

(۲) e^z تابعی متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ است.

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$$

حل معادله نمایی :

مراحل حل معادله نمایی به شکل $e^z = z$:

(۱) نوشتن e^z بصورت $e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$.

(۲) جایگذاری عبارت فوق در معادله و برابر قرار دادن قسمت های حقیقی و موهومی.

مثال : مطلوب است حل معادله $e^z = 4$.

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x \cos y = 4 \\ e^x \sin y = 0 \rightarrow (e^x \neq 0), \sin y = 0 \rightarrow y = k\pi (k=0, \pm 1, \dots) \end{cases}$$

$$e^x \cos y = 4 \rightarrow e^x = 4 \rightarrow x = \ln 4 \Rightarrow z = \ln 4 + i(k\pi)$$

مثال : جواب های معادله $e^{rz} = 3$ را بیابید.

$$e^{rz} = e^{rx} \times e^{riy} = e^{rx} (\cos ry + i \sin ry) = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{rx} \cos ry = 3 \rightarrow e^{rx} = 3 \rightarrow rx = \ln 3 \rightarrow x = \frac{1}{r} \ln 3 \rightarrow z = \frac{1}{r} \ln 3 + i \left(\frac{k\pi}{r} \right) \\ e^{rx} \sin ry = 0 \rightarrow \sin ry = 0 \rightarrow y = \frac{k\pi}{r}, (k=0, \pm 1, \dots) \end{cases}$$

بخش دوم : توابع مثلثاتی

می دانیم که :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad , \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

اگر دو عبارت بالا را جمع کنیم :

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x \rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

و اگر از هم کم کنیم :

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \rightarrow \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

به ازای $z = x + iy$ داریم :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \quad , \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

بررسی تحلیلی بودن :

(۱) e^{iz} و e^{-iz} تام $\leftarrow \sin z$ و $\cos z$ همه جا تحلیلی و در نتیجه تام هستند.

(۲) $\tan z$ و $\sec z$ همه جا تحلیلی هستند به جز ریشه های مخرج :

$$\cos z = 0 \rightarrow z = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad , (k = 0, \pm 1, \dots)$$

(۳) $\cot z$ و $\csc z$ همه جا تحلیلی هستند به جز ریشه های مخرج :

$$\sin z = 0 \Rightarrow z = k\pi \quad , (k = 0, \pm 1, \dots)$$

مشتق :

چون $(e^{iz})' = ie^{iz}$, $(e^{-iz})' = -ie^{-iz}$ داریم :

مانند توابع متعالی :

$$1) (\sin z)' = \cos z$$

روابط مثلثاتی : از تعریف سینوس و کوسینوس نتیجه می شود :

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z$$

لذا تعداد زیادی از اتحادهای مثلثاتی برای متغیرهای مختلط نیز برقرارند.

مثال : نشان دهید $2 \sin z_1 \cos z_2 = \sin(z_1 + z_2) + \sin(z_1 - z_2)$ (*)

$$2 \sin z_1 \cos z_2 = 2 \left(\frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \right) \left(\frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} \right)$$

$$\frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} + \frac{e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2) + \sin(z_1 - z_2)$$

از اتحاد قبل (*) روابط زیر نتیجه میشود :

$$1) \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$2) \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$3) \sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad 4) \sin 2z = 2 \sin z \cos z$$

$$5) \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z, \quad 6) \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$$

$$7) \sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos z$$

تفاوتی که این روابط با روابط مثلثاتی دارند این است که روابط مثلثاتی در دایره مثلثاتی اتفاق می افتد، اما این روابط ماهیت متفاوتی دارند. البته در ظاهر شبیه یکدیگر هستند.

یادآوری هایپربولیک :

$$(\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2})$$

$$\cos(iy) = \cosh y, \sin(iy) = i \sinh y$$

رابطه (۸) ارتباط بین هایپربولیک ها و روابط مثلثاتی میباشد و رابطه مهمی محسوب میشود.

اگر در روابط (۱)، (۲) قرار دهیم $z_1 = x$ ، $z_2 = iy$ ، آنگاه داریم :

$$9) \sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$10) \cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$11) \sin(z+2p) = \sin z \quad , \quad 12) \cos(z+2p) = \cos z$$

در (۱۱)، (۱۲) $\sin z$ و $\cos z$ متناوب، با دوره تناوب $2p$ هستند.

$$13) \sin(z+p) = -\sin z \quad , \quad 14) \cos(z+p) = -\cos z$$

$$15) \tan(z+p) = \tan z \quad , \quad 16) \cot(z+p) = \cot z$$

توابع $\tan z$ و $\cot z$ متناوب، با دوره تناوب p هستند.

$$17) |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \quad , \quad 18) |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

نکته : چون $|\sin x| \leq 1$ ، $|\cos x| \leq 1$ پس $\sin x$ و $\cos x$ کراندار هستند، اما

$\sinh y \rightarrow \infty$ ، $y \rightarrow \infty$ در نتیجه $\sin z$ و $\cos z$ کراندار نیستند.

تمرین : به منظور تشریح روش اثبات، درستی اتحاد شماره (۱۷) را بررسی کنید.

حل :

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

ابتدا مشخص می کنیم قسمت حقیقی و موهومی $\sin z$ کدام است.

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\begin{aligned} \rightarrow |\sin z|^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x (1 + \sinh^2 y) + \cos^2 x \sinh^2 y \\ &= \sinh^2 y (\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^2 x = \sinh^2 y + \sin^2 x \end{aligned}$$

صفرهای $\sin z$ و $\cos z$:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 0$$

$$\begin{cases} \sin x \cosh y = 0 \Rightarrow \cosh y \neq 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k = 0, \pm 1, \dots \\ \cos x \sinh y = 0 \Rightarrow \cos k\pi \neq 0 \Rightarrow \sinh y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = k\pi, k = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$$

پس صفرهای $\sin z$ همان صفرهای $\sin x$ است.

$$\cos z = -\sin(z - \frac{\pi}{2})$$

$$\cos z = 0 \Rightarrow \sin(z - \frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow z - \frac{\pi}{2} = k\pi \Rightarrow z = k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots$$

پس صفرهای $\cos z$ همان صفرهای $\cos x$ می باشد.

حل معادلات مثلثاتی : حل این نوع معادلات را با مثال بررسی می کنیم.

مثال : معادله $\cos z = 2$ را حل کنید.

روش اول :

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x \cosh y = 2 \Rightarrow (x = k\pi) \Rightarrow \cos k\pi = \pm 1 \\ -\sin x \sinh y = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cosh y = \pm 2 \Rightarrow y = \cosh^{-1}(\pm 2) \Rightarrow z = \cosh^{-1}(\pm 2) + i(k\pi), k = 0, \pm 1, \dots$$

روش دوم : (روش مستقیم) :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 2e^{iz} - 2e^{-iz} = 0$$

$$e^{iz} = t \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix} \cdot e^{-y} = e^{-y} (\cos x + i \sin x) = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} e^{-y} \cos x = 2 \pm \sqrt{3} \\ e^{-y} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, (k=0, \pm 1, \dots) \end{cases}$$

$$x = k\pi \Rightarrow \cos k\pi = \pm 1 \Rightarrow e^{-y} (\cos k\pi) = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow y = -\ln(2 \pm \sqrt{3}) \\ -e^{-y} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow e^{-y} = -(2 \pm \sqrt{3}) \Rightarrow y = -\ln[-(2 \pm \sqrt{3})] \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = k\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$$

مثال : ثابت کنید $|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$.

حل :

$$|\sinh z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \Rightarrow |\sinh y|^2 \leq |\sin z|^2 \Rightarrow |\sinh y| \leq |\sin z|$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \cosh^2 y - 1 = \sin^2 x + \cosh^2 y - \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow |\sin z|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x \Rightarrow |\sin z|^2 \leq \cosh^2 y$$

توابع هذلولوی (هیپربولیک) : از توابع نمایی در حالت حقیقی، توابع هیپربولیک را می ساختیم، دقیقاً شبیه

همان اما به جای x ، z قرار می دهیم.

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

نکته : e^z ، e^{-z} نام هستند پس $\sinh z$ ، $\cosh z$ همه جا تحلیلی و در نتیجه نام هستند.

مشتق : (شبه روابط حقیقی، فقط به جای z, x قرار می دهیم.)

$$۱) (\sinh z)' = \cosh z, \quad ۲) (\cosh z)' = \sinh z$$

$$۳) (\tanh z)' = \operatorname{sech}^2 z, \quad ۴) (\coth z)' = -\operatorname{csch}^2 z$$

$$۵) (\operatorname{sech} z)' = -\operatorname{sech} z \cdot \tanh z$$

$$۶) (\operatorname{csch} z)' = -\operatorname{csch} z \cdot \coth z$$

ارتباط هایی بین توابع مختلط و توابع مثلثاتی هیپربولیک وجود دارد :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

بنابراین سینوس و کسینوس توابع هذلولوی و مثلثاتی رابطه نزدیکی باهم دارند.

$$x \rightarrow iz \quad \sinh(iz) = i \sin z, \cosh(iz) = \cos z$$

$$z \rightarrow iz - i \quad \sin(iz) = i \sinh z, \cos(iz) = \cosh z$$

بصورت مشابه نتایج زیره دست می آید :

$$۱) \sinh(-z) = -\sinh z, \quad ۲) \cosh(-z) = \cosh z$$

$$۳) \cosh^2 z - \sinh^2 z = ۱$$

$$۴) \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$۵) \cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$$

و از روابطه آخراستفاده می کنیم، به روابط بعدی می رسیم :

$$۶) \sinh z = \sinh(x+iy) = \sinh x \cosh y + i \cosh x \sinh y$$

$$۷) \cosh z = \cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$۸) |\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y, \quad ۹) |\cosh z|^2 = \cosh^2 x + \cos^2 y$$

به منظور تشریح روش اثبات، درستی اتحاد (۸) را بررسی می کنیم.

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$|\sinh z|^2 = |\sin(iz)|^2 = |\sin(x+iy)|^2 = |\sin(-y+ix)|^2 = |\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

با تعویض جای x, y در رابطه اخیر:

$$|\sinh z|^2 = \sin^2 y + \sinh^2 x$$

مثال : عبارت $\cosh(-2+3i)$ را به شکل $u+iv$ بنویسد.

$$\cosh(-2+3i) = \cosh(-2)\cos 3 + i\sinh(-2)\sin 3 = \cosh 2 \cos 3 - i\sinh 2 \sin 3$$

$$\Rightarrow u = \cosh 2 \cos 3, \quad v = -\sinh 2 \sin 3$$

بین توابع هیپربولیک مختلط و توابع مثلثاتی مختلط رابطه های زیر برقرار است :

$$\sinh z = -i \sin(iz), \quad \cosh z = \cos(iz)$$

$\sinh z, \cosh z$ توابعی متناوب با دوره تناوب $2\pi i$ می باشند.

$\tanh z, \coth z$ توابعی متناوب با دوره تناوب πi می باشند.

صفرهای $\sinh z, \cosh z$:

$$\sinh z = 0 \Rightarrow -i \sin(iz) = 0 \Rightarrow \sin(iz) = 0 \Rightarrow iz = kp \Rightarrow z = kp i, k = 0, \pm 1, \dots$$

$$\cosh z = 0 \Rightarrow \cos(iz) = 0 \Rightarrow z = (kp + \frac{\pi}{2})i, k = 0, \pm 1, \dots$$

بخش چهارم : تابع لگاریتمی

با استفاده از تابع نمایی تعریف می کنیم.

$$e^w = z, z \neq 0 \Rightarrow w = \ln z$$

$$w = u + iv, z = re^{iq} (q = \arg z) \Rightarrow e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = re^{iq}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^u = r \Rightarrow u = \ln r \\ e^{iv} = e^{iq} \Rightarrow v = q = \arg z \end{cases}$$

$$e^w = z \Leftrightarrow w = \ln z = u + iv = \ln r + i \arg z$$

$$\Rightarrow \ln z = \ln r + i \arg z \quad (r = |z| > 0, \arg z = \text{Arg} z + 2k\pi)$$

مثال : مطلوب است محاسبه $\ln(-1 - i\sqrt{3})$.

$$z = -1 - i\sqrt{3} \Rightarrow r = 2, \text{Arg} z = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \ln(-1 - i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), k = 0, \pm 1, \dots$$

توجه داشته باشید $\ln$ این عدد مقدار زیادی پاسخ دارد زیرا k مقدارهای زیادی می گیرد.

مقدار اصلی :

$$\ln z = \ln r + i \arg z = \ln |z| + i (\text{Arg} z + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \dots \rightarrow \text{جواب های چند مقداری}$$

$$k = 0 \Rightarrow \ln z = \ln r + i \text{Arg} z \rightarrow \text{مقدار اصلی } \ln z, \text{ تک مقداری}$$

$$\ln z = \ln z + 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \dots$$

نکته : اگر z عددی حقیقی و مثبت باشد پس $\text{Arg} z = 0$ و در نتیجه $\ln z$ با لگاریتم طبیعی حقیقی ($\ln x$) یکی می شود.

اگر z حقیقی و منفی باشد پس $\text{Arg} z = \pi$ ، پس $\ln z = \ln r + \pi i$.

یادآوری : در حساب دیفرانسیل، لگاریتم اعداد حقیقی منفی تعریف نشده است.

مثال : برای $z = 1$ داریم .

$$z = 1 \Rightarrow x = 1, y = 0 \Rightarrow r = 1, \text{Arg}z = \arctan 0 = 0$$

$$\ln 1 = \ln(1) + i(0 + 2kp) = 2kpi$$

$$\leftarrow \ln 1 = \ln(1) + i(0) = 0 \quad \text{به عنوان شاخه اصلی}$$

مثال : مقدار اصلی $\ln(-1)$ را بیابید.

$$z = -1 \Rightarrow x = -1, y = 0 \Rightarrow r = 1, \text{Arg}z = \arctan\left(\frac{0}{-1}\right) = p$$

$$\text{Ln}(-1) = \ln(1) + ip = ip \quad \text{شاخه اصلی}$$

$$\text{در سایر نقاط} : \ln(-1) = \ln(1) + i(p + 2kp) = i(2k+1)p$$

قرارداد : Ln (با ال بزرگ) نشانه شاخه اصلی و $\ln$ (با ال کوچک) چند مقداری .

خواص $\ln z$:

$$1) \ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$$

$$2) \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2, \quad 3) \ln z^n \neq n \ln z$$

مثال : فرض کنیم $z = -1$ ، در این صورت :

$$\ln(-1)^2 = \ln 1 = 2kpi, \quad 2 \ln(-1) = 2(2k+1)pi$$

نکته : در خواص لگاریتم در قسمت بالا رابطه (۱) برای مقدار اصلی $\ln$ برقرار نیست.

$$\text{مثال} : z_1 = z_2 = e^{ip} = -1$$

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(1) = 0, \quad \ln(z_1) + \ln(z_2) = 2 \ln(-1) = 2pi$$

شاخه ها و مشتقات لگاریتم :

$$\text{Ln}z = \ln|z| + i\text{Arg}z \quad \text{تک مقداری}$$

این تابع در $z = 0$ و قسمت منفی محور حقیقی، پیوسته نیست :

اگر $f(z) = \text{Arg}z$ و z نقطه ای روی قسمت منفی محور حقیقی باشد، هر همسایگی چنین نقطه ای شامل مقداری از $f(z)$ میشود که به p نزدیک است (ربع دوم) و مقداری دلخواه که به $-p$ نزدیک است

(ربع سوم). پس در دو مسیر متفاوت وقتی $z \rightarrow Z$ دو مقدار متفاوت حاصل می شود. لذا تابع حد ندارد و پیوسته نیست. پس $\text{Ln}z$ پیوسته نیست. حال اگر $z = 0$ و قسمت منفی محور حقیقی، در نظر گرفته نشود تابع $\text{Ln}z$ در دامنه باقی مانده پیوسته خواهد بود.

در حالت کلی تراگر :

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \quad (|z| = r > 0, a < \theta < a + 2\pi)$$

تابع فوق در دامنه تعیین شده نه تنها پیوسته است بلکه تحلیلی نیز هست، زیرا مشتقات مرتبه اول آن پیوسته بوده و در معادلات کوشی ریمان صدق می کند.

$$\ln z = u + iv = \ln r + i \arg z$$

$$u = \ln r = \ln|z| = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$v = \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c \quad (c \text{ مضربی از } 2\pi)$$

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} = v_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} \quad , \quad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} = -v_x = -\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2}$$

معادلات کوشی ریمان به جزمبدأ همه جا برقرار است.

مشتق :

$$(\ln z)' = u_x + i v_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

پس : $(\ln z)' = \frac{1}{z} (|z| > 0, a < \arg z = q < a + 2\pi)$

و همچنین برای مشتق شاخه اصلی $\text{Ln} z$ داریم :

$$(\text{Ln} z)' = \frac{1}{z} (|z| = 0, -\pi < \text{Arg} z < \pi)$$

شاخه اصلی $\text{Ln} z$: تابع تک مقداری $\text{Ln} z$ که در ناحیه ای مانند D از صفحه مختلط تحلیلی باشد.

$$\text{Ln} z = \ln |z| + i \text{Arg} z, (-\pi < \text{Arg} z < \pi)$$

بریدگی شاخه ای : خطی که برای تولید دامنه تحلیلی مورد استفاده قرار می گیرد.

نقطه شاخه ای : نقطه ای مانند z که یک نقطه مشترک برای تمام بریدگی های شاخه ای تابع چند مقداری است.

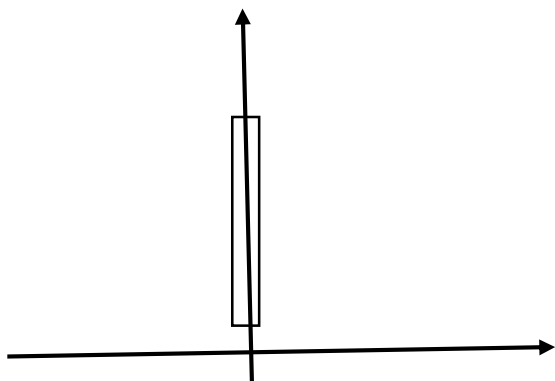
مثال : فرض کنید $f(z) = \ln |z| + iq$ که $-\frac{3\pi}{2} < q \leq \frac{\pi}{2}$.

ناحیه ناپیوستگی $\leftarrow$ نقطه $z = 0$ و محور موهومی مثبت است.

$f(z)$ پیوسته و تحلیلی است $\rightarrow -\frac{3\pi}{2} < q < \frac{\pi}{2} \rightarrow r > 0$ اما اگر

بریدگی شاخه ای قسمت مشخص شده روی محور موهومی مثبت است که در آن $x = 0$ می باشد.

$$(x = 0 \text{ و } y \geq 0)$$



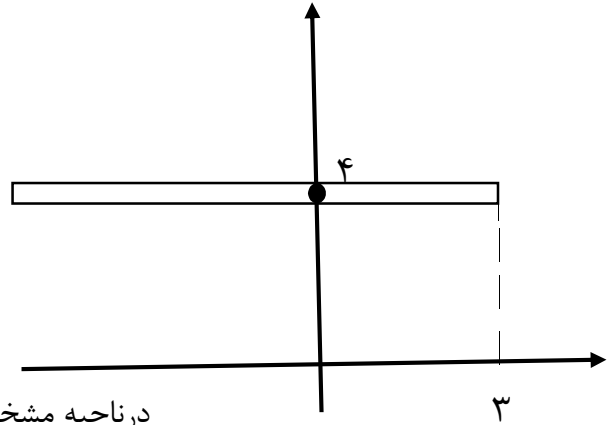
مثال : بزرگترین دامنه از تابع $f(z) = \ln(z - (3 + 4i))$ را بیابید که f در آن تحلیلی است.

$$w = z - (3 + 4i) = (x - 3) + (y - 4)i$$

$$\text{Im}w = 0 \Rightarrow y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4$$

$$\text{Re}((x + iy) - (3 + 4i)) \leq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

$$x \leq 3, y = 4$$



در ناحیه مشخص شده نمی تواند تحلیلی باشد، اما در سایر نقاط تحلیلی است

بخش پنجم : توان های عمومی

اگر با زبان برنامه نویسی پاسگال آشنایی داشته باشید، در برنامه نویسی های پاسگال می نویسیم $a^b = e^{b \ln a}$ پس :
الف) C مختلط باشد :

$$z^C = e^{C \ln z}, \ln z = \ln r + i \arg z \quad (z \neq 0)$$

$\ln z$ چند مقداری می باشد پس z^C نیز چند مقداری است.

حال اگر مقدار اصلی z^C را بخواهیم تعیین کنیم کفایت مقدار اصلی $\text{Ln} z$ را محاسبه کنیم :

$$z^C = e^{C \text{Ln} z}, \text{Ln} z = \ln r + i \text{Arg} z$$

ب) C عددی صحیح باشد.

$$C = n = \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow z^n = r^n (\cos nq + i \sin nq) \rightarrow \text{تک مقداری}$$

ج) اگر C عددی کسری باشد.

چون ریشه n ام z $(\sqrt[n]{z})$ ، چند مقداری است پس z^C هم چند مقداری می شود.

$$C = \frac{1}{n}, n = 2, 3, \dots \Rightarrow z^C = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n} \ln z}, (z \neq 0) \rightarrow \text{چند مقداری}$$

مثال : مقدار $1^{\sqrt{2}}$ را محاسبه کنید. (توجه داشته باشید که $1^{\sqrt{2}}$ یک مختلط است و گرنه جواب میشد یک)

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 1}, \ln 1 = ?$$

اگر بخواهیم مقدار اصلی را محاسبه کنیم به جای k می گذاریم صفر که می شود $e^0 = 1$ یعنی همان جواب حقیقی.

$$z = 1 \Rightarrow r = 1, \text{Arg} 1 = \arctan 0 = 0$$

$$\Rightarrow \ln 1 = \ln 1 + i(2kp + 0) = (2kp)i \Rightarrow 1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}(2kp)i}$$

مثال : مقدار اصلی i^i را بیابید.

$$i^i = e^{i \text{Ln} i}, \text{Ln} i = ?$$

$$z = i \Rightarrow r = 1 \Rightarrow \text{Arg} z = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Lni} = \ln 1 + i \frac{\pi}{2} = i \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow i^i = e^{i \text{Lni}} = e^{i \left(i \frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

اگر در تعریف z^C جای z, C را عوض کنیم داریم :

$$c^z = e^{z \ln c} \quad (1)$$

$\ln z$ به جزمبدأ و نیمه منفی محور حقیقی (محور x ها)، تک مقداری و تحلیلی است پس z^C هم در این دامنه تک مقداری و تحلیلی است و:

$$(z^C)' = c z^{C-1}$$

در رابطه (1) با انتخاب یک مقدار برای $\ln c$ ، تابعی تک مقداری خواهیم داشت که همه جا تحلیلی است و:

$$(c^z)' = c^z \ln c$$

$$\text{مثال : نشان دهید } \frac{d}{dz}(i)^z = \frac{\pi}{2} i^{z+1}$$

$$(c^z)' = c^z \ln c$$

$$c = i \Rightarrow r = 1, \quad \text{Arg} c = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \ln c = \ln 1 + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$k = 0 \Rightarrow \ln c = i \frac{\pi}{2} \Rightarrow (i^z)' = i^z \left(i \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} i^{z+1}$$

بخش ششم : توابع مثلثاتی وارون

مانند $\sin^{-1} z$ یا $\text{Arc tan } z$.

به عنوان نمونه ضابطه یکی از این توابع را بدست می آوریم :

$$w = \cos^{-1} z \Rightarrow \cos w = z \Rightarrow \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z$$

$$\Rightarrow e^{iw} + e^{-iw} = 2z \Rightarrow e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

$$\underline{e^{iw} = t} \quad t^2 - 2zt + 1 = 0 \Rightarrow t = e^{iw} = z + i\sqrt{1-z^2} \Rightarrow iw = \ln(z + i\sqrt{1-z^2})$$

با ضرب طرفین در i :

$$w = \cos^{-1} z = -i \ln(z + i\sqrt{1-z^2})$$

به همین ترتیب بصورت مشابه داریم :

$$\sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2}) \quad , \quad \tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)$$

$$\sec^{-1} z = i \ln\left(\frac{z}{1 + \sqrt{1-z^2}}\right)$$

مثال : مقدار $\sin^{-1}(-i)$ را محاسبه کنید.

$$\sin^{-1}(-i) = -i \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) = \ln(1 + \sqrt{2}) + 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$z = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow r = 1 + \sqrt{2}, \text{Arg } z = \arctan 0 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}(-i) = -i \ln(1 + \sqrt{2}) + 2k\pi i = 2k\pi - i \ln(1 + \sqrt{2}), k = 0, \pm 1, \dots$$

توابع هذلولوی وارون :

مانند $\text{Arc tanh } z, \cosh^{-1} z$

مشابه قسمت قبل که ضابطه ها را بدست می آوریم، بدست می آید.

تمرین : مانند قسمت قبل اثبات کنید. (یعنی مثلاً $z = \sinh w \leftarrow w = \sinh^{-1} z$ و ادامه بدهید تا z را بدست آورید.)

$$\sinh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} z = (z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

مثال : مقدار $\tanh^{-1} \cdot$ را حساب کنید.

$$\tanh^{-1} \cdot = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\cdot}{1-\cdot}\right) = \frac{1}{2} \ln 1 \Rightarrow \ln 1 = \ln(1) + i(\cdot + 2k\pi) = 2k\pi i$$

(در $\ln 1$ ، یک عددی مختلط می باشد)

$$\Rightarrow \tanh^{-1} \cdot = \frac{1}{2} (2k\pi i) = k\pi i, k = \cdot, \pm 1, \dots$$

مشتق توابع مثلثاتی و هذلولوی وارون :

$$1) (\sin^{-1} z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad 2) (\cos^{-1} z)' = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad 3) (\tan^{-1} z)' = \frac{1}{1+z^2}$$

و به همین ترتیب برای توابع هایپربولیک وارون داریم :

$$4) (\sinh^{-1} z)' = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad 5) (\cosh^{-1} z)' = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

(توجه داشته باشید که این z ها براساس دامنه آنهاست لذا باهم متفاوت هستند و متغیر می باشند)

$$6) (\tanh^{-1} z)' = \frac{1}{1-z^2}$$

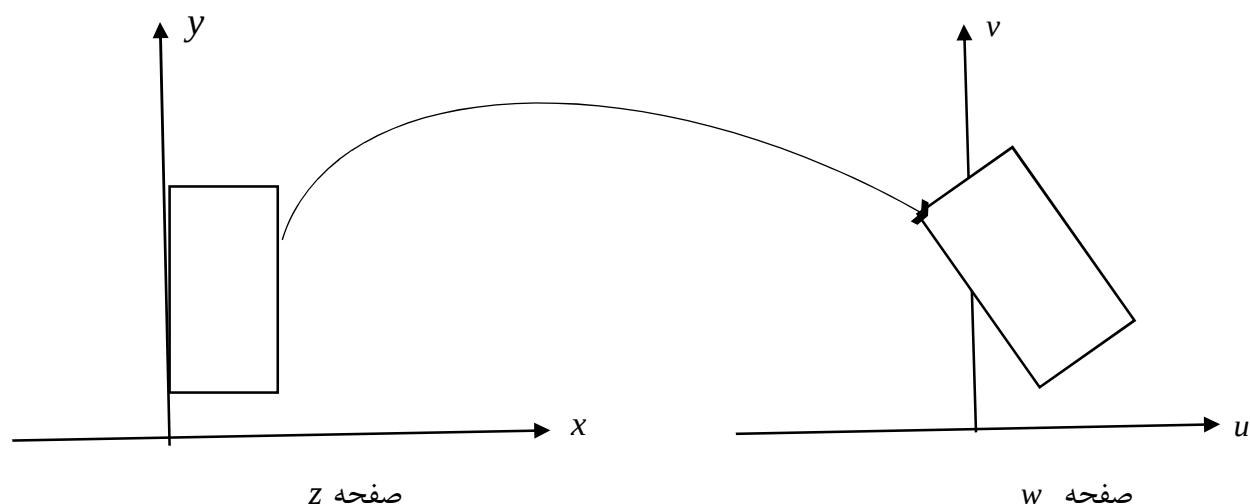
نکته : توجه داشته باشید اگر به جای z تابعی بر حسب z ، مانند u قرار بگیرد در طرف دوم طبق قاعده زنجیره ای یک u' در صورت قرار می گیرد.

به عنوان مثال : مشتق (u تابعی بر حسب z) $\sinh^{-1} u = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$.

بخش هفتم : نگاشت به وسیله توابع مقدماتی

حال که با توابع مقدماتی آشنا شدیم، نگاشت به وسیله این توابع را بررسی می کنیم :

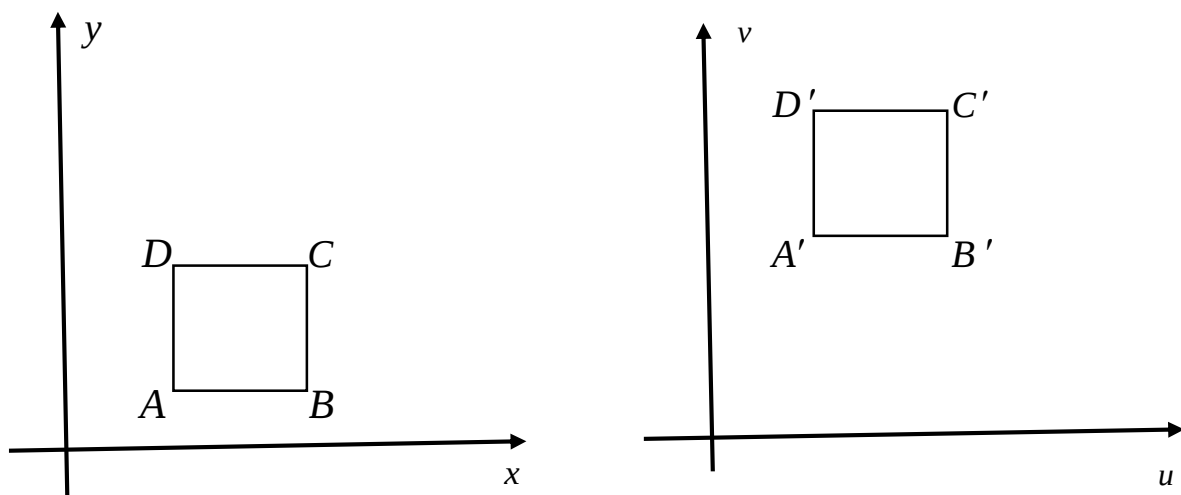
در شکل های زیر برای نگاشت (باهر ضابطه ای)، دامنه و برد را جداگانه در دو دستگاه مختلف نمایش می دهیم. مثلاً برای تابع $f(z)=w$ ، z در یک دستگاه و w نیز در یک دستگاه جداگانه بررسی می شود. (در صفحه های دوبعدی).



در این بخش می خواهیم ببینیم به ازای نگاشت های مختلف ناحیه در صفحه z به چه نواحی در صفحه w متناظر می شود:

الف) نگاشت $w = az + b$

اگر $a=1$ و در صورتی که $b \neq 0$ باشد، $w = z + b$ که به این نوع نگاشت یک انتقال می گوئیم و هر نقطه را در جهت b به اندازه $|b|$ انتقال می دهد.



نکته : اگر $b=0$ باشد، در نتیجه نگاشت بصورت $w = z$ می شود که به آن نگاشت همانی می گوئیم، و هر نقطه را بر روی خودش می نگارد. (در صفحه V, U)

(۲) اگر $b=0$ و $a \neq 0, 1$ باشد نگاشت بصورت $w = az$ می شود.

حال اگر a حقیقی باشد:

$$|w| = |a||z|, \arg w = \arg z$$

سپس دوشکل مشابه هستند فقط شکل صفحه w , a برابر شکل صفحه z است.

توجه داشته باشید اگر $a > 1$ باشد حالت انبساط اتفاق می افتد. (بزرگتر).

و اگر $0 < a < 1$ باشد انقباض پیدا می کند. (کوچکتر).

در حالت بعدی اگر a مختلط باشد :

$$a = re^{ia} = |z| e^{ia}$$

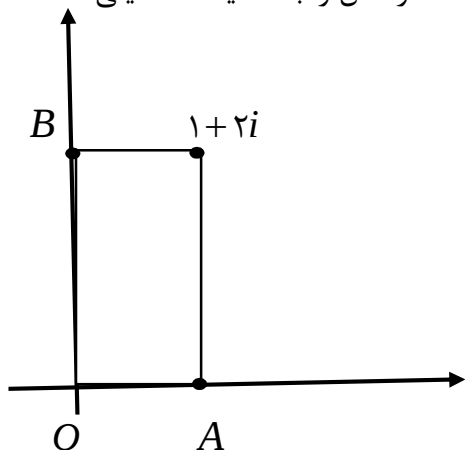
$$|a| = 1 \Rightarrow a = e^{ia} \Rightarrow w = e^{ia} z$$

دوران به اندازه a حول مبدأ و یک انبساط یا انقباض (یعنی زاویه هر نقطه دلخواه در صفحه xy را اگر Q بگیریم با a جمع می شود لذا دوران به اندازه a حول مبدأ بوجود می آید).

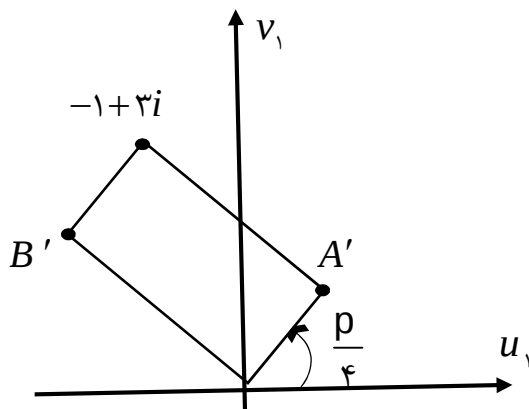
اگر $0 < a < 1$ باشد انقباض و اگر $a > 1$ انبساط می شود.

مثال : تبدیل $w = (1+i)z + 2$ ناحیه مستطیلی از صفحه z نشان داده شده در شکل را به ناحیه مستطیلی

در صفحه w می نگارد.



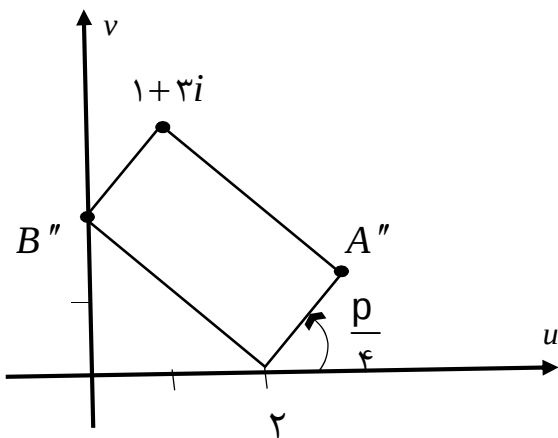
(انبساطی با ضریب $\sqrt{2}$ و دوران به اندازه $\frac{p}{4}$ صورت گرفته) $a = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{p}{4}} \Rightarrow z = (1+i)z$



حال اگر انتقال ۲ واحد به راست هم در نظر بگیریم در نهایت شکل بصورت زیر است :

$$W = Z + 2 \rightarrow$$

انتقالی به اندازه ۲ واحد به راست



مثال: تصویر ناحیه محدود به خطوط $y = 2, x = 1, y = 0, x = 0$ را تحت نگاشت $w = \sqrt{2}e^{i\frac{p}{4}}z + (1+2i)$ پیدا کنید.

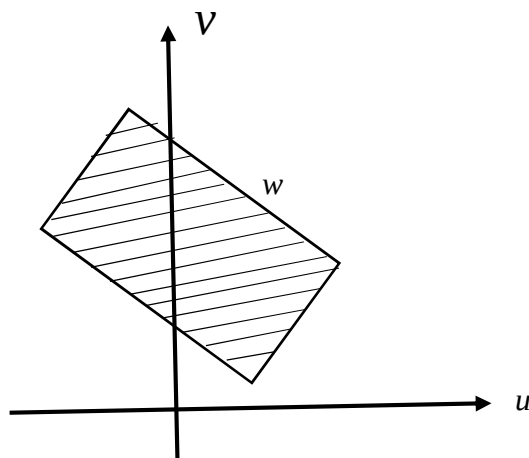
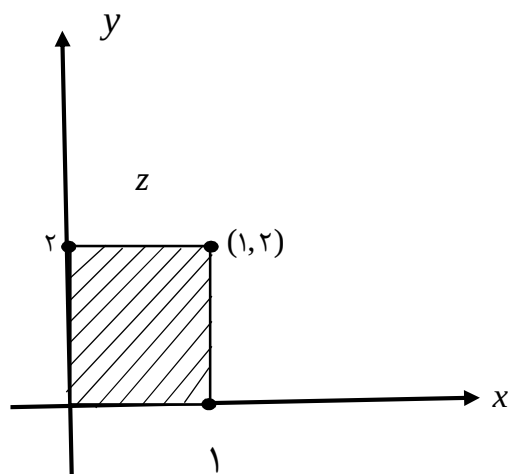
$$z = x + iy$$

$$w = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x + iy) + 1 + 2i = (1+i)(x + iy) + 1 + 2i = (x - y + 1) + i(x + y + 2) = u + iv$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = x - y + 1 \\ v = x + y + 2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{u + v - 3}{2}, y = \frac{v - u - 1}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow u + v = 3, y = 0 \Rightarrow v - u = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow u + v = 5, y = 2 \Rightarrow v - u = 5$$

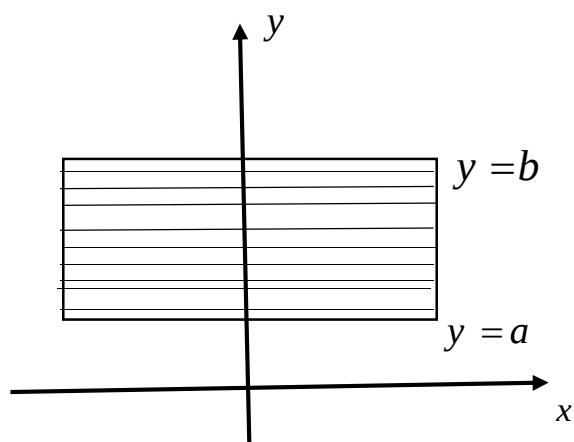


(ب) نگاشت نمایی $w = e^z$:

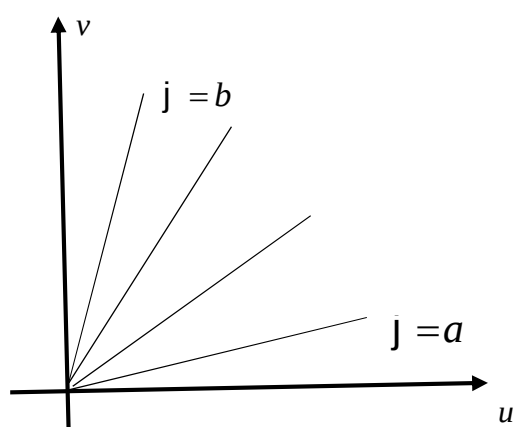
$$z = x + iy \Rightarrow w = Re^{ij} = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow R = e^x, j = y$$

$$z \text{ در صفحه } y = a \Rightarrow w \text{ در صفحه } j = a$$

خطوط شعاعی در صفحه $w \rightarrow$ خطوط موازی با محور x ها در صفحه z



خطوط موازی با محور x ها در صفحه z

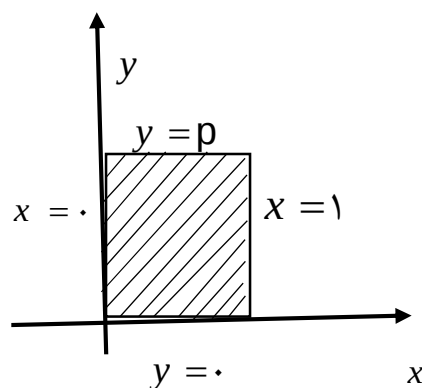


خطوط شعاعی در صفحه w

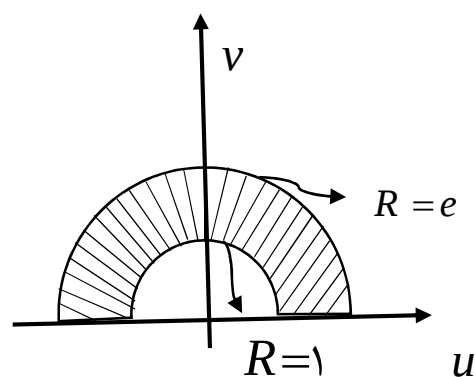
مثال : تصویر مستطیل $0 \leq y \leq p, 0 \leq x \leq 1$ را تحت نگاشت $w = e^z$ بیابید.

$$x = 0 \Rightarrow R = e^0 = 1, y = 0 \Rightarrow j = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow R = e^1 = e, y = p \Rightarrow j = p$$



صفحه Z



صفحه W

ج) نگاشت $w = \ln z$: (چون این تابع معکوس تابع نمایی است کافیت نگاشت هایی که در صفحات قبل برای نگاشت نمایی داشتیم وارون کنیم یعنی جای صفحات w, Z را عوض کنیم).

$$w = \ln z = \ln r + i \arg z = \ln r + i(q + 2kp) = u + iv, (-p \leq q = \text{Arg} z \leq p)$$

$$\Rightarrow u = \ln r, v = 2kp + q \quad (\text{اگر } k=0 \text{ شاخه اصلی})$$

یک تابع چند مقداری است یعنی به ازای هر k یک شاخه لگاریتم داریم.

$$e^w = z \Rightarrow \text{وارون تابع نمایی} = \text{تابع الگاریتم}$$

وارون این تابع، نوارهایی به عرض $2p$ از صفحه w را به صفحه z می نگارد ($z \neq 0$).

پس هر شاخه از تابع چند مقداری $\ln z$ صفحه $C - \{0\}$ را به روی چنین نوازی می نگارد.

اگر $k=0$ ، آنگاه شاخه اصلی $\ln z = \ln r + i \text{Arg} z$ ، صفحه $C - \{0\}$ را روی این نوار (به عرض $2p$ روی w) می نگارد.

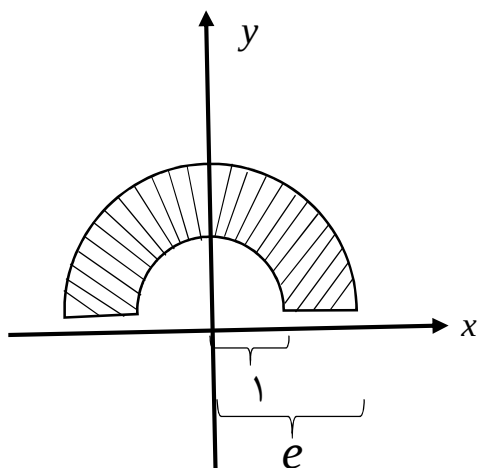
مثال : تصویر ناحیه محدود به دایره $|z| \geq 1$, $|z| \leq e$ را تحت نگاشت $W = \ln z$ بیابید.

حل :

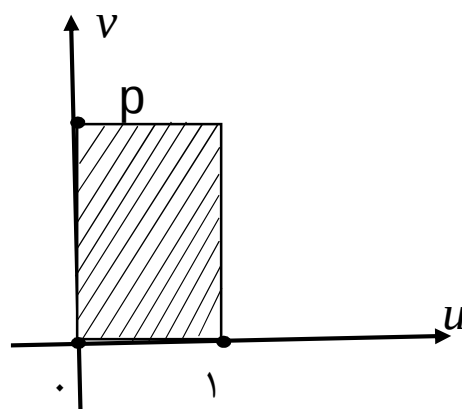
$$w = \ln z = \ln|z| + i \arg z = u + iv$$

$$\ln|z| = u \Rightarrow \begin{cases} |z| \geq 1 \Rightarrow \ln|z| = u \geq \ln 1 = 0 \\ |z| \leq e \Rightarrow \ln|z| = u \leq \ln e = 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq u \leq 1$$

$$\arg z = v \Rightarrow 0 \leq v \leq p \quad \text{چون نیم دایره هستند بین } 0, p \text{ میگیریم}$$



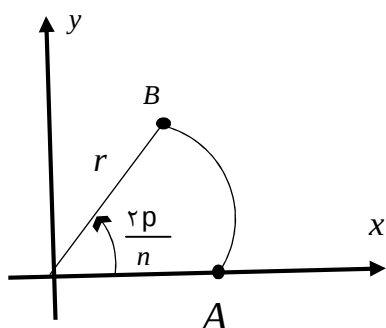
صفحه z



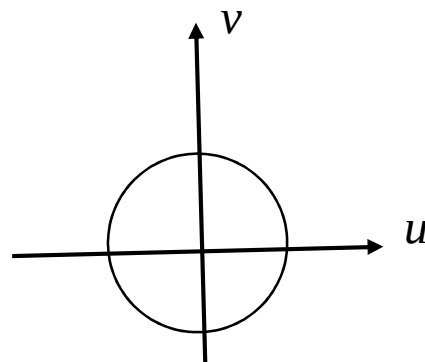
صفحه w

(د) تابع $w = z^n$:

$$z = re^{iq} \Rightarrow w = r^n e^{inq} = Re^{ij} \Rightarrow R = r^n, j = nq$$



صفحه z



صفحه w

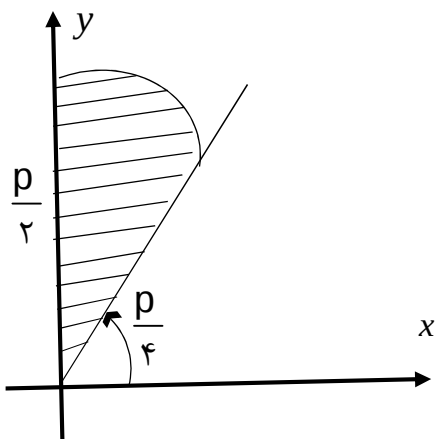
مثال: تصویر قطاع $\frac{p}{4} \leq \text{Arg} z \leq \frac{p}{2}$, $|z| < 1$ را تحت نگاشت $w = z^{\frac{1}{2}}$ بیابید.

$$z = re^{iq} w = Re^{ij} \Rightarrow w = z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{q}{2}} = Re^{ij}$$

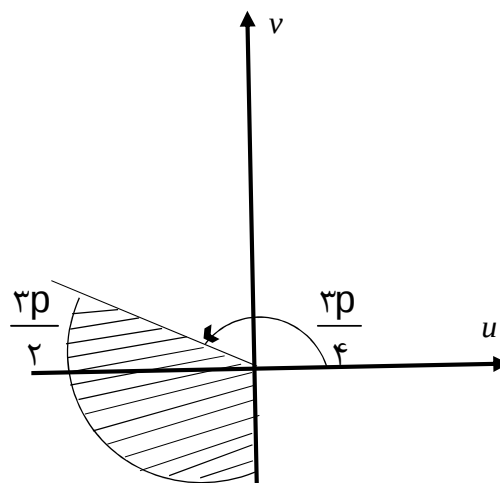
$$\Rightarrow R = r^{\frac{1}{2}}, j = \frac{q}{2} = \frac{1}{2} \text{Arg} z$$

$$R = |z|^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} < 1, \frac{p}{4} \leq \text{Arg} z \leq \frac{p}{2} \Rightarrow \frac{p}{4} \leq j \leq \frac{p}{2}$$

$$|z| < 1, \frac{p}{4} \leq \text{Arg} z \leq \frac{p}{2}$$



$$R < 1, \frac{p}{4} \leq j \leq \frac{p}{2}$$



ه) تابع $w = z^{\frac{1}{n}}$ (عددی صحیح و مثبت است) همان ریشه n ام z ($w = \sqrt[n]{z}$) است.

$$w = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{2kp + q}{n} + i \sin \frac{2kp + q}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$$

هریک از n مقدار حاصل، یک شاخه $\sqrt[n]{z}$ است.

اگر $-p < q < p$ باشد، نگاشتی یک به یک به روی قطاع $\frac{2kp - p}{n} \leq j \leq \frac{2kp + p}{n}$ باشعاع $R > 0$ می

شود.

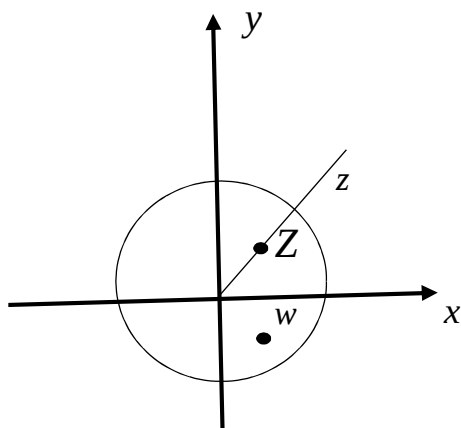
(و) تابع $w = \frac{1}{z}$: اگر صورت و مخرج این تابع را در $\bar{z}$ ضرب کنیم :

$$w = \frac{z}{z\bar{z}}, z\bar{z} = |z|^2 \Rightarrow Z = \frac{1}{|z|^2} \cdot z, w = \bar{z}$$

تبدیل اول $\leftarrow$ انعکاس نسبت به دایره $|z| = 1$ یعنی تصویر نقطه z ناصفر Z است با ویژگی های زیر:

$$\arg Z = \arg z, \quad |Z| = \frac{1}{|z|}$$

تبدیل دوم $\leftarrow$ یک تقارن نسبت به محور حقیقی:



(w قرینه نقطه Z)

مثال : ثابت کنید $w = \frac{1}{z}$ دایره و خطوط را به دایره و خطوط تبدیل می کند.

حل : اگر دایره ای را در صفحه xy در نظر بگیریم :

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (\text{معادله دایره})$$

چهار حالت ممکن است پیش آید: (۱) اگر $A \neq 0, D \neq 0$ $\leftarrow$ دایره ای در xy که از مبدأ نمی گذرد.

(۲) اگر $A \neq 0, D = 0$ $\leftarrow$ دایره ای که از مبدأ می گذرد.

(۳) اگر $A = 0, D \neq 0$ $\leftarrow$ نشان دهنده یک خط که از مبدأ نمی گذرد.

(۴) اگر $A = 0, D = 0$ $\leftarrow$ نشان دهنده خطی که از مبدأ می گذرد.

$$w = \frac{1}{z} \rightarrow z = \frac{1}{w} = \frac{1}{u+iv} = \frac{u-iv}{u^2+v^2} = \frac{u}{u^2+v^2} - i \frac{v}{u^2+v^2} = x + iy$$

$$\Rightarrow x = \frac{u}{u^2+v^2}, y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

با جایگزینی x, y بر حسب u, v خواهیم داشت :

$$D(u^2+v^2) + Bu - Cv + A = 0 \rightarrow (A \neq 0) \text{ و یا خط } (A = 0)$$

$$z = \sin w$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = u + iv$$

$$\Rightarrow u = \sin x \cosh y, v = \cos x \sinh y$$

بررسی تصاویر خطوط قائم $x = C_1$:

$$0 < C_1 < \frac{\pi}{2}, x = C_1$$

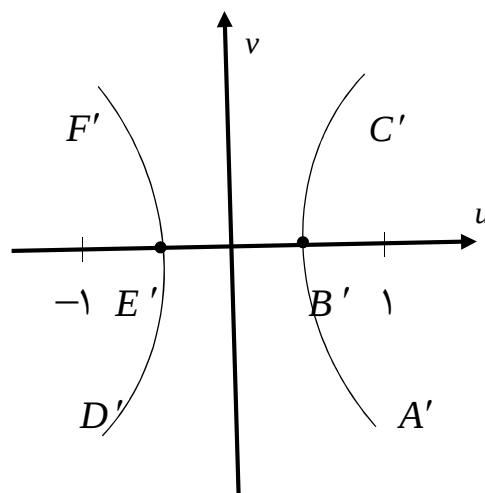
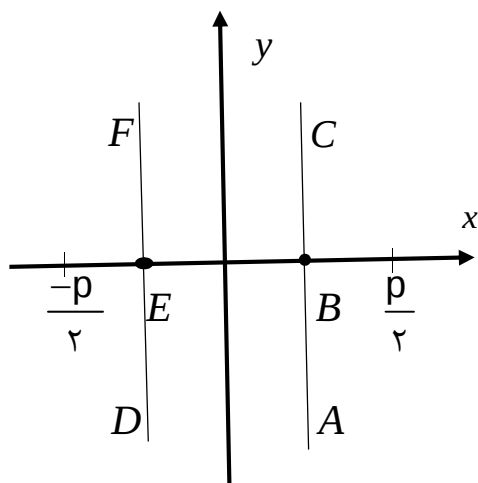
$$\Rightarrow u = \sin C_1 \cosh y, v = \cos C_1 \sinh y \quad (-\infty < y < +\infty)$$

که شاخه سمت راست هذلولی زیر است:

$$\frac{u^2}{\sin^2 C_1} - \frac{v^2}{\cos^2 C_1} = 1$$

$$\frac{-\pi}{2} < C_1 < 0, x = C_1 \rightarrow$$

شاخه سمت چپ همان هذلولی



مثال : تصویر ناحیه $|u| \leq \frac{p}{2}$ ، $v \geq 0$ را تحت تبدیل $z = \sin w$ بیابید.

$$z = \sin w = \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v = x + iy$$

$$\Rightarrow x = \sin u \cosh v, y = \cos u \sinh v$$

$$v \geq 0 \Rightarrow \cosh v \geq 1, \sinh v \geq 0 \Rightarrow y \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

توابع $w = \sinh z, w = \cos z$ و... با استفاده از تابع سینوس:

$$w = \cos z = \sin(z + \frac{p}{2}) \rightarrow \left(\text{انتقال به اندازه } \frac{p}{2} \text{ و نگاشت سینوسی} \right)$$

$$w = \sinh z = -i \sin(iz) \rightarrow \left(\frac{p}{2}, \text{ نگاشتی سینوسی، دوران } -\frac{p}{2} \right)$$

مثال : تصویر خط $z = ix$ را که $0 \leq x \leq \frac{p}{2}$ تحت نگاشت $w = \cosh z$ بیابید.

$$w = \cosh z = \cos iz = \cos z \rightarrow \left(\text{چون } \cos \text{ زوج است } -\cos z = \cos z \right)$$

$$\Rightarrow u = \cos x, v = 0$$

$$0 \leq x \leq \frac{p}{2} \Rightarrow 0 \leq u \leq 1, v = 0$$

فصل چهارم: انتگرال گیری در صفحه مختصات

بخش اول : انتگرال خط در صفحه مختلط

بخش دوم : قضیه کوشی _ گورسا و نتایج آن

بخش سوم : فرمول انتگرال کوشی و تعمیم آن

بخش اول : انتگرال خط در صفحه مختلط

مسیر انتگرال گیری: در حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی : انتگرال گیری بر یک بازه (یک پاره خط) از خط حقیقی می باشد.

اما در انتگرال معین یا انتگرال روی خط توابع مختلط : انتگرال گیری در طول یک منحنی C در صفحه مختلط می باشد.

مسیر انتگرال گیری : منحنی C که انتگرال گیری بر آن صورت می پذیرد.

نمایش پارامتری منحنی C : (پارامتر t) :

$$z = x + iy \Rightarrow z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

مثال : شکل پارامتری قسمتی از خط $y = 3t$ عبارت است از:

$$x = t \Rightarrow y = 3t \Rightarrow z(t) = t + i3t$$

مثال : نمایش پارامتری سهمی $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ را بنویسید.

$$x = t \Rightarrow y = t^2 \Rightarrow z(t) = t + it^2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

مثال : نمایش پارامتری دایره یکه $|z| = 1$ را بیابید.

$$\begin{aligned} x &= |z| \cos t = \cos t \\ y &= i |z| \sin t = i \sin t \end{aligned} \Rightarrow z(t) = \cos t + i \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

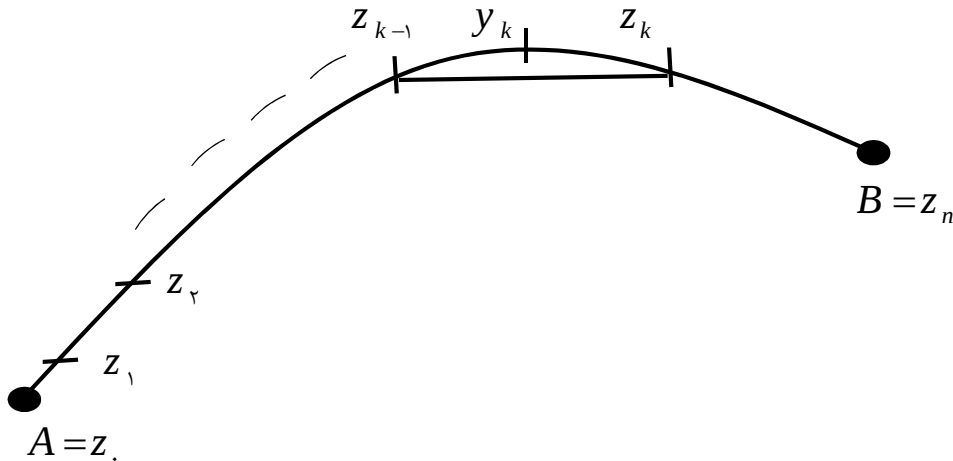
منحنی ساده (کمان جردن) : منحنی که خودش را قطع نکند.

منحنی ساده بسته (منحنی جردن) : منحنی ساده ای که ابتدا و انتهای آن برهم منطبق است.

اگر $x(t), y(t)$ در معادله پارامتری $z(t)$ در فاصله $a \leq t \leq b$ دارای مشتقات پیوسته باشد می گوییم منحنی هموار (یک قطعه هموار) است.

یک منحنی ساده شامل تعداد متناهی منحنی هموار باشد می گوییم منحنی تکه ای هموار است.

تعریف انتگرال خط : فرض کنیم C یک منحنی ساده تکه ای هموار باشد که نقطه A را به نقطه B وصل می کند.



$$s_n = \sum_{k=1}^n f(y_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(y_k) \Delta z_k$$

$$|\Delta z| = \max |z_k - z_{k-1}| \Rightarrow \int_C f(z) dz = \lim_{\Delta z_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(y_k) \Delta z_k$$

اگر C یک منحنی بسته باشد مثل یک دایره یا منحنی به شکل Λ آنگاه از نماد $\int_C f(z) dz$ استفاده می کنیم.

محاسبه انتگرال خط :

قضیه : اگر C یک مسیر تکه ای هموار باشد که با $a \leq t \leq b$ و $z = z(t)$ نمایش داده شده همچنین $f(z)$ یک تابع پیوسته بر C باشد آنگاه :

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \Rightarrow dz = z'(t) dt = (x'(t) + iy'(t)) dt$$

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = \int_a^b f(x(t) + iy(t))(x'(t) + iy'(t)) dt$$

خواص انتگرال خط :

$$۱) \int_C k f(z) dz = k \int_C f(z) dz \quad (k \text{ عدد ثابت})$$

$$۲) \int_C (f(z) \pm g(z)) dz = \int_C f(z) dz \pm \int_C g(z) dz$$

اگر مسیر C به دو قسمت C_1, C_2 تجزیه شود :

$$۳) \int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

$$۴) \int_C f(z) dz = - \int_{-C} f(z) dz \quad (-C \text{ مسیری خلاف جهت } C \text{ است})$$

$$۵) \left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML \quad (ML \text{ نامساوی})$$

M کران بالای $|f(z)|$ روی C و L طول منحنی C است.

مثال : مطلوب است محاسبه کران بالای $\left| \int_C z^2 dz \right|$ که در آن C یک پاره خط از 0 تا $1+i$ می باشد.

حل:

$$C \text{ طول منحنی} = L = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$|f(z)| = |z^2| \leq 2 \Rightarrow \left| \int_C z^2 dz \right| \leq 2\sqrt{2}$$

مثال : مقدار $\int_C f(z) dz$ را وقتی $f(z) = x^2 + iy^2$ است را برای حالت های زیر بیابید:

الف) C سهمی $y = x^2$ از مرکز مختصات تا نقطه $A(1,1)$ است.

ب) C از مرکز مختصات به نقطه $B(1,0)$ و سپس روی خط $X=1$ به نقطه $A(1,1)$.

پاسخ قسمت الف) :

۱) پارامتری کردن مسیر:

$$z = x + iy, x = t \Rightarrow y = t^2 \Rightarrow z(t) = t + it^2, 0 \leq t \leq 1$$

از طرفین دیفرانسیل میگیریم :

$$dz = z'(t)dt = (1 + i2t)dt$$

(۲) محاسبه $f(z(t))$:

$$f(z(t)) = f(x(t), y(t)) = t^2 + i(t^2)^2 = t^2 + it^4$$

(۳) جایگذاری طبق قضیه :

$$\int_C f(z)dz = \int_b^a f(z(t))z'(t)dt = \int_0^1 (t^2 + it^4)(1 + i2t)dt$$

شبهه ریاضی ۱ انتگرال معین بالا را حل می کنیم: (ابتدا ضرب می کنیم و $i^2 = -1$ و سپس حل می کنیم).

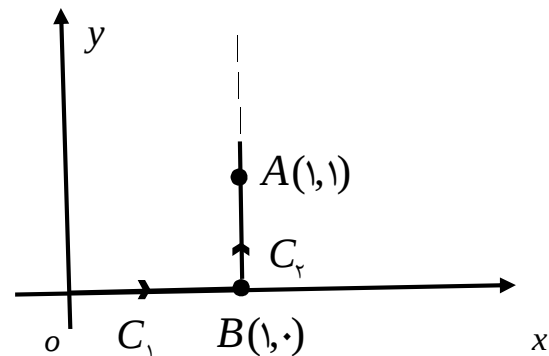
$$\text{پاسخ قسمت} = \frac{1}{12} + \frac{9}{14}i$$

(ب) :

از مرکز مختصات به نقطه $B(1,0)$ و سپس روی خط $x=1$ به نقطه $A(1,1)$:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow z(t) = t, \quad f(z(t)) = t^2$$



$$C_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow z(t) = 1 + it, f(z(t)) = 1 + it^2$$

$$\Rightarrow \int_C f(z)dz = \int_{OB} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1 + it^2)(i)dt = \frac{1}{3}$$

مثال : نشان دهید اگر C دایره $z - z_0 = re^{iq}$ با جهتی عکس عقربه های ساعت و $f(z)$ بر آن پیوسته باشد، آنگاه :

$$\int_C f(z) dz = ir \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{iq}) e^{iq} dq$$

و با استفاده از آن ثابت کنید :

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, n \neq -1 \\ 2\pi i, n = -1 \end{cases}$$

حل :

$$z - z_0 = re^{iq} \Rightarrow z = z_0 + re^{iq}, dz = rie^{iq} dq, 0 \leq q \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{iq}) (rie^{iq}) dq = ri \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{iq}) e^{iq} dq$$

بافرض $f(z) = (z - z_0)^n$ داریم :

$$\int_C f(z) dz = \int_C (z - z_0)^n dz = ir \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{iq} - z_0) (e^{iq}) dq$$

$$= ir \int_0^{2\pi} r^n e^{inq} e^{iq} dq = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)q} dq = \left. \frac{ir^{n+1} e^{i(n+1)q}}{n+1} \right|_0^{2\pi} = 0, n \neq -1$$

حال اگر $n = -1$ باشد :

$$\Rightarrow \int_C (z - z_0)^{-1} dz = ir \int_0^{2\pi} (re^{iq})^{-1} (e^{iq}) dq = i \int_0^{2\pi} dq = 2\pi i$$

توجه داشته باشید این انتگرال مستقل از شعاع دایره است

$$\Rightarrow \int_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, n \neq -1 \\ 2\pi i, n = -1 \end{cases}$$

نتیجه : انتگرال روی خط توابع مختلط، به مسیرانتگرال گیری وابسته است.

مقدار کار انجام شده به وسیله نیروی F : مقدار کار انجام شده به وسیله نیروی $\vec{F} = u\vec{i} + v\vec{j}$ در طول

مسیر عبارت است از :

$$\text{Re} \int_C \bar{f}(z) dz$$

($\leftarrow \text{Re}$) قسمت حقیقی). که در آن $\bar{f} = u - iv$ مزدوج $f = u + iv$ است.

مثال : مقدار کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (x + y^2)\vec{i} + x^2\vec{j}$ را روی مسیر مستقیم از نقطه $A(0,0)$ تا $B(1,2)$ نقطه بیابید.

حل : ابتدا معادله خط گذرا از دو نقطه A , B را به دست می آوریم.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x \rightarrow C \text{ مسیر}$$

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow z(t) = t + i(2t), z'(t) = 1 + 2i$$

$$f(z) = (x + y^2) + ix^2 \Rightarrow \bar{f}(z) = (x + y^2) - ix^2$$

حال به جای x می گذاریم t و به جای y می گذاریم $2t$ و $\bar{f}(z(t))$ را می نویسیم :

$$\bar{f}(z(t)) = (t + (2t)^2) - i(t^2) = (t + 4t^2) - it^2$$

حال باید $\int_C \bar{f}(z) dz$ که همان $\int_C \bar{f}(z(t)) z'(t) dt$ است را محاسبه کنیم، قسمت حقیقی جواب است :

$$\text{کار انجام شده} = \text{Re} \int_C \bar{f}(z) dz = \text{Re} \int_0^1 \bar{f}(z(t)) z'(t) dt$$

$$= \text{Re} \int_0^1 [(t + 4t^2) - it^2] [1 + 2i] dt = \text{Re} \left[(1 + 2i) \left(\frac{1}{2} t^2 + \frac{4}{3} t^3 - \frac{i}{4} t^4 \right) \right]_0^1$$

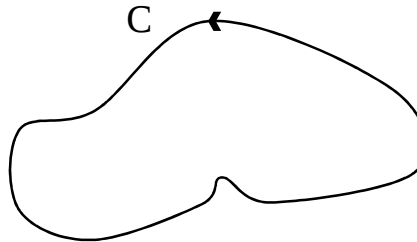
$$= \text{Re} \left(\frac{7}{3} + \frac{41}{12} i \right) = \frac{7}{3}$$

بخش دوم : قضیه کوشی-گورسا و نتایج آن

برای بسیاری از انتگرال ها نیازی به محاسبه نیست و کافیت از این قضیه استفاده کنیم و بلافاصله نتیجه را جواب بدهیم.

قضیه کوشی : اگر تابع $f(z)$ در ناحیه D و روی مرز آن یعنی C ، تحلیلی و $f'(z)$ روی این مرز پیوسته باشد آنگاه :

$$\int_C f(z) dz = 0$$



(C جهت مثبت)

نحوه تعیین جهت مثبت : ناظر در حین عبور در آن جهت، شانه چپش داخل مسیری افتد، و اگر در جهت منفی حرکت کنیم انتگرال قرینه می شود.

مثال : حاصل $|z|=1$ ، C ، $\oint_C \frac{e^z}{\cos z} dz$ را بیابید.

نقاط تکین $\rightarrow z = k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots$ $\cos z = 0 \Rightarrow$

چون نقاط تکین در مسیر C واقع نیستند، تابع $f(z) = \frac{e^z}{\cos z}$ در تمام نقاط داخل و روی مسیر C تحلیلی است. از طرفی $f'(z)$ نیز روی C پیوسته است، پس :

$$\oint_C \frac{e^z}{\cos z} dz = 0$$

قضیه کوشی-گورسا :

اگر تابع $f(z)$ در تمام نقاط داخل و روی مرز ساده بسته C تحلیلی باشد، آنگاه :

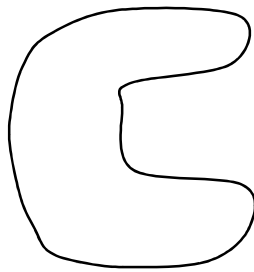
$$\oint_C f(z) dz = 0$$

مثال : مطلوب است محاسبه $\oint_C \frac{dz}{z^2 + 4}$ که در آن، C دایره واحد است.

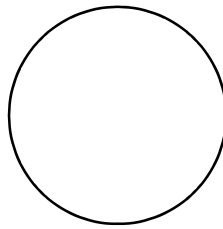
نقاط تکین که خارج از دایره واحد قرار دارند $\rightarrow z = \pm 2i \Rightarrow z^2 + 4 = 0$

پس تابع در ناحیه D و روی مرز آن تحلیلی است، لذا حاصل انتگرال صفر است.

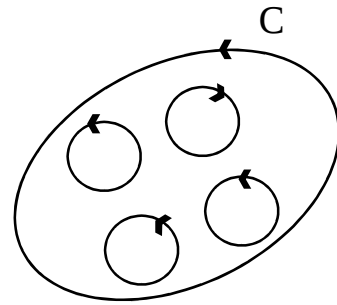
تعریف : ناحیه D با مرز C را همبند ساده می نامیم. هرگاه هر مسیر ساده بسته در D فقط شامل نقاط D باشد، در غیر این صورت ناحیه را همبند چندگانه می نامیم.



همبند ساده



همبند ساده

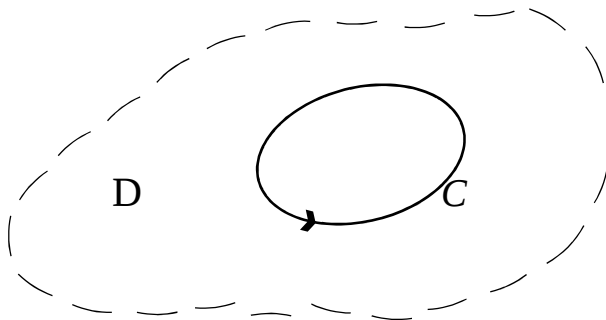


همبند چندگانه

نتایجی از قضیه کوشی - گورسا :

(۱) هرگاه $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D تحلیلی باشد، به ازای هر مسیر ساده بسته C درون D داریم :

$$\oint_C f(z) dz = 0$$



مثال : در بخش قبل دیدیم که :

$$\int_C (z - z_0)^n dz = 0, n \neq -1$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{1}{z} dz = \int_C z^{-1} dz = 0, C : |z| = 1$$

اما این جواب را نمی توان با استفاده از نتیجه قبل، به دست آورد چون: $f(z) = \frac{1}{z}$ در $z = 0$ تحلیلی نیست،

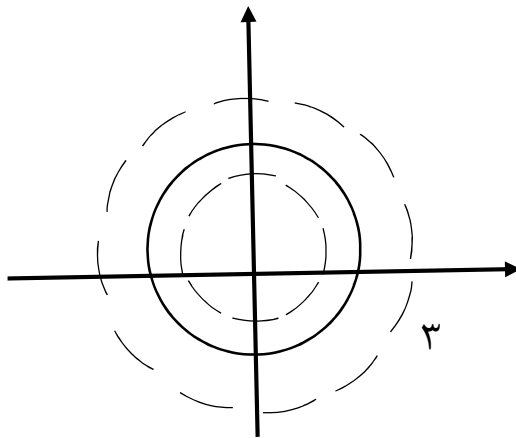
پس: تحلیلی بودن f در D یک شرط کافی است نه لازم.

مثال: فرض کنید $f(z) = \frac{1}{z}$ ، $D = \{z \mid 1 < |z| < 3\}$ و C دایره ای به شعاع ۲ و مرکز $(0,0)$ باشد دراین

صورت:

(۱) f بر D تحلیلی است.

(۲) C مسیرهاده بسته ای در D است.

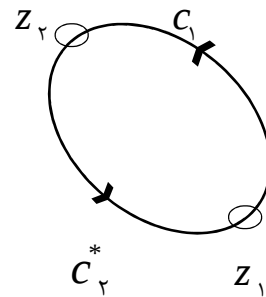
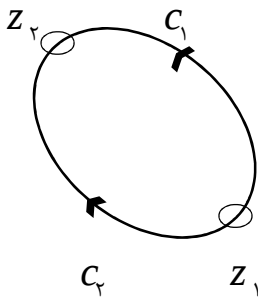


$$\int_C (z - z_0)^n dz = 2\pi i, n = -1 \Rightarrow \int_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0.$$

نتیجه: شرط همبند ساده بودن دامنه D در مطلب بالا، ضروری است.

(۲) مستقل از مسیره بودن: اگر $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D تحلیلی باشد، آنگاه انتگرال $f(z)$ مستقل

از مسیر D است.



$$\oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_1^*} f(z) dz = 0 \rightarrow \text{قضیه کوشی - گورسا}$$

$$\Rightarrow \oint_{C_1} f(z) dz = -\oint_{C_1^*} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz$$

(۳) اگر $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D تحلیلی باشد، آنگاه تابع $F(z) = \int_{z_1}^{z_2} f(w) dw$ در D تحلیلی است و $F'(z) = f(z)$ (مانند قضیه اول حساب دیفرانسیل انتگرال در ریاضی ۱).

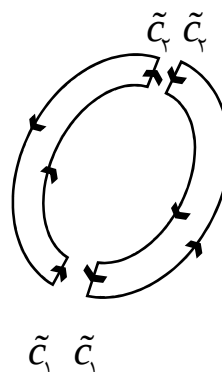
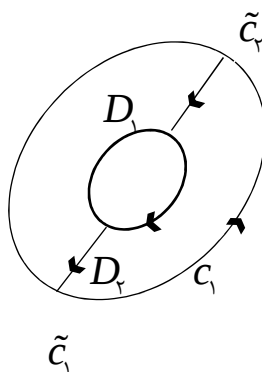
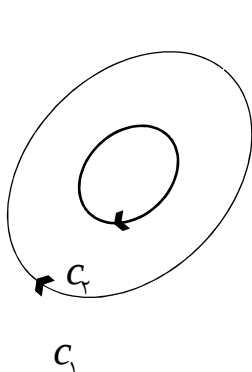
مثال: انتگرال های زیر را حساب کنید.

الف) $\int_{\gamma} e^z dz = e^z \Big|_{\gamma}^{\pi i} = e^{\pi i} - e^0 = -1 - 1 = -2$

ب) $\int_{\gamma} z \cosh z dz = \frac{1}{2} \sinh z \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} (\sinh 1 - \sinh(-1)) = 0$

(۴) اگر D یک ناحیه همبند دوگانه (چندگانه) با مرزهای C_1, C_2 و تابع $f(z)$ در آن تحلیلی باشد آنگاه:

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

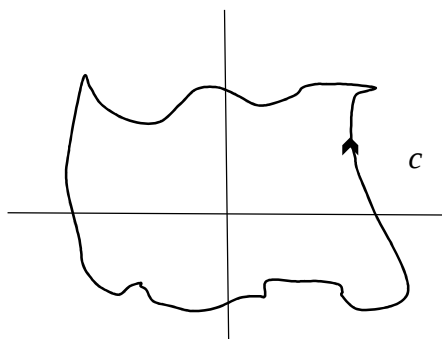


جهت ها مثبت است

دومسیر کاذب را درست کردیم

$$\oint_{C_1} f(z) dz - \oint_{C_2} f(z) dz = 0 \rightarrow \text{(یعنی با هم برابرند)}$$

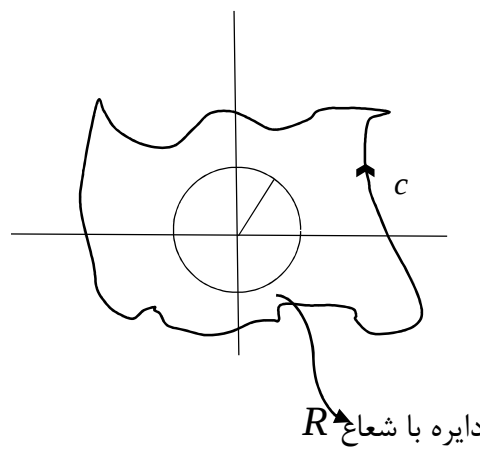
مثال: فرض کنید C مسیر شکل زیر باشد، $\oint_C \frac{1}{z} dz$ را محاسبه کنید.



یک مسیر منظم مانند

دایره C داخل مسیر

درست می کنیم

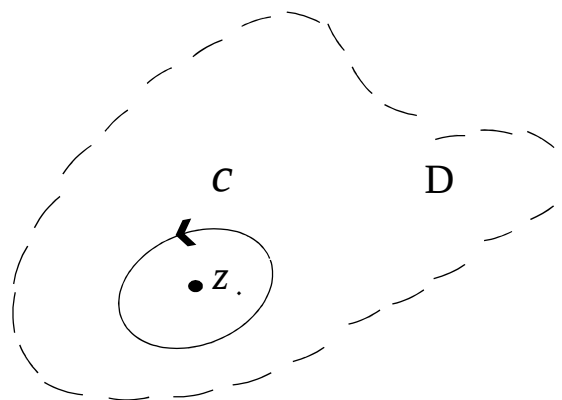


$$\oint_C \frac{1}{z} dz = \int_{|z|=R} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{iq}} (Rie^{iq}) dq = i \int_0^{2\pi} dq = 2\pi i$$

$$z = Re^{iq} \Rightarrow dz = Rie^{iq} dq$$

بخش سوم : فرمول انتگرال کوشی

قضیه : فرض کنید $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D و روی مرز آن تحلیلی باشد. در این صورت، به ازای هر نقطه z در D و هر مسیر ساده بسته C در D که z را شامل باشد، داریم :



$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz = f(z_0)$$

باضرب طرفین در $2\pi i \rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz = 2\pi i f(z_0)$

مثال : حاصل $\oint_C \frac{\cosh z}{z^2 - 2z} dz$ را بیابید، که در آن C مرز دایره $|z| = 1$ است.

حل :

فقط $z = 0$ داخل ناحیه D قرار دارد $\rightarrow z = 0, z = 2 \Rightarrow z^2 - 2z = 0$

$$f(z) = \frac{\cosh z}{z^2 - 2z}, z_0 = 0 \Rightarrow f(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{\cosh z}{z^2 - 2z} dz = \oint_C \frac{\cosh z}{z} dz = 2\pi i f(0) = -\pi i$$

تعمیم فرمول انتگرال کوشی :

در این بخش، با استفاده از فرمول انتگرال کوشی، نشان می دهیم یک تابع تحلیلی از هر مرتبه دارای مشتق است.

قضیه : فرض کنید $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D با مرز C تحلیلی باشد. در این صورت، f در هر نقطه ای مثل z از این ناحیه دارای مشتق از هر مرتبه ای است و این مشتقات تحلیلی هستند :

$$f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \rightarrow (n) \text{ مشتق مرتبه } n$$

اگر طرفین رابطه بالا را در $\frac{2\pi i}{n!}$ ضرب کنیم :

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

مثال : اگر C دایره $|z|=2$ باشد، $\oint_C \frac{z(z^2+1)}{(z-1)^2} dz$ را محاسبه کنید.

$z-1=0 \Rightarrow z=1 \rightarrow$ تابع در $z=1$ تحلیلی نیست

$$\Rightarrow f(z) = z(z^2+1) \quad \oint_C \frac{z(z^2+1)}{(z-1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} (z(z^2+1))' \big|_{z=1} = 2\pi i(2) = 4\pi i$$

مثال : حاصل $\oint_C \frac{e^z dz}{(z-3)(z+1)^2}$ را برای حالت ها زیر بدست آورید.

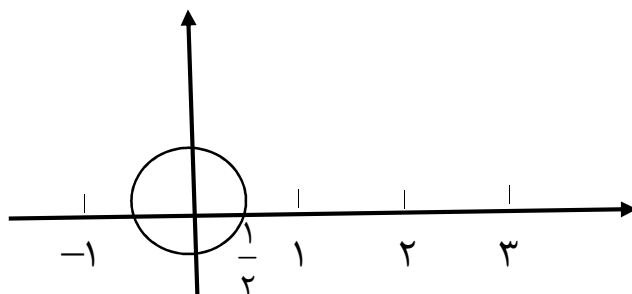
الف) $C : |z| = \frac{1}{2}$

ب) $C : |z| = \frac{3}{2}$

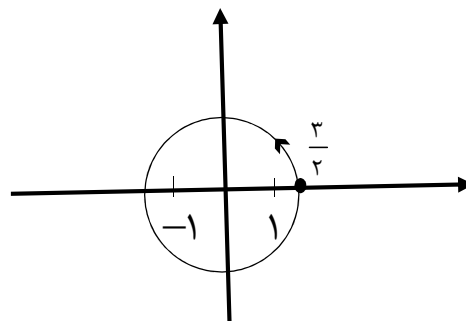
حل :

تابع در این نقاط تحلیلی نیست $(z-3)(z+1)^2=0 \Rightarrow z=3, z=-1 \rightarrow$

الف) هر دو نقطه به دست آمده خارج از ناحیه هستند، پس تابع تحلیلی است و طبق قضیه کوشی حاصل انتگرال صفر است.



ب) برای $|z| = \frac{3}{2}$ ، فقط نقطه $z=-1$ داخل مسیرهست بنابراین :



$$\Rightarrow \oint_C \frac{e^z}{(z+1)^2} dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z+1} \right)' \Big|_{z=-1} = \frac{-1 \cdot \pi}{1^2 e} i$$

$$f(z) = \frac{e^z}{z-3}$$

نتایج قضیه فوق :

(۱) قضیه مورآ (عکس قضیه کوشی گورسا) : فرض کنید تابع $f(z)$ در ناحیه همبند ساده D پیوسته باشد و به ازای هر مسیر ساده بسته C در D داشته باشیم :

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

در این صورت $f(z)$ در D تحلیلی است.

(۲) نامساوی کوشی : فرض کنید C دایره ای به مرکز Z و شعاع r و M کران بالای $|f(z)|$ باشد یعنی $|f(z)| < M$ در این صورت :

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{Mn!}{r^n} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

برهان : تعمیم فرمول انتگرال کوشی :

$$|f^{(n)}(z)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi i} \cdot \frac{ML}{r^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \frac{M(2\pi i)}{r^{n+1}} = \frac{Mn!}{r^n}$$

(۳) قضیه لیوویل :

اگر $f(z)$ تحلیلی و $|f(z)| \leq M$ ، آنگاه $f(z)$ تابعی ثابت است.

برهان : در نامساوی کوشی قرار می دهیم $n=1$ ، بنابراین :

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$$

چون f تابعی تام است می توان r را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کرد ($r \rightarrow \infty$)، در اینصورت $f'(z) = 0$ است و چون z دلخواه بود نتیجه می شود $f(z)$ تابعی ثابت است.

قضیه اساسی جبر: هر چند جمله ای مرتبه n بصورت زیر:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

حداقل یک ریشه دارد.

برهان: اگر $a_0 = 0$ نتیجه بدیهی است، فرض می کنیم $a_0 \neq 0$ و به برهان خلف $p(z) \neq 0$ در اینصورت:

$$p(z) \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{p(z)} \text{ تحلیلی}$$

از طرفی $|f(z)|$ کراندار است زیرا:

$$p(z) = z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + a_n \right)$$

$$|z| \Rightarrow \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + a_n \right| > \left| \frac{a_n}{2} \right| \Rightarrow |p(z)| > \frac{a_n z^n}{2}$$

پس داریم:

$$|f(z)| = \frac{1}{p(z)} < \frac{2}{a_n z^n} \Rightarrow |f(z)| \text{ کراندار}$$

$p(z)$ ثابت $\Rightarrow f(z)$ ثابت $\rightarrow$ طبق قضیه لیاوول

که چنین نیست، زیرا به ازای هر z ، $p(z)$ مقادیر مختلفی اختیار می کند. پس حداقل یک z هست که $p(z) = 0$.

مثال: نشان دهید معادله $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0$ دقیقاً n ریشه دارد.

حل: فرض کنیم $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$. پس حداقل یک $z = z_1$ وجود دارد به طوری که $p(z_1) = 0$.

بنابراین:

$$p(z) = (z - z_1)Q(z) \Rightarrow \exists z = z_r; Q(z_r) = 0$$

$$\Rightarrow p(z) = (z - z_1)(z - z_r)R(z)$$

⋮

$$\Rightarrow p(z) = (z - z_1)(z - z_r) \dots (z - z_n) \Rightarrow \text{معادله دارای } n \text{ ریشه است.}$$

(۴) قضیه مقدار میانگین گوس : فرض کنیم $f(z)$ داخل و روی مرز دایره C به مرکز a و شعاع r تحلیلی باشد در این صورت :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{iq}) dq$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(a + re^{iq}) dq = 2\pi f(a)$$

برهان : فرمول انتگرال کوشی :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz$$

که $|z - a| = r$ یا $z = a + re^{iq}$ است.

و با جایگذاری در انتگرال، نتیجه حاصل می شود.

مثال : حاصل $\int_0^{2\pi} \sin^r\left(\frac{p}{r} + e^{iq}\right) dq$ را بیابید.

حل : از مقایسه با قضیه مقدار میانگین گوس داریم :

$$\int_0^{2\pi} f(a + re^{iq}) dq = 2\pi f(a)$$

$$a = \frac{p}{r}, \quad f(x) = \sin^r x$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^r\left(\frac{p}{r} + e^{iq}\right) dq = 2\pi \sin^r\left(\frac{p}{r}\right) = 2\pi \left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^r = p$$

قضیه ماکزیمم و مینیمم هنگ توابع :

اگر $f(z)$ داخل و روی منحنی ساده بسته C تحلیلی و غیر ثابت باشد، آنگاه $|f(z)|$ مقدار ماکزیمم خود را روی منحنی C اختیاری کند، به علاوه اگر به ازای هر z در داخل منحنی، $f(z) \neq 0$ ، آنگاه مقدار مینیمم $|f(z)|$ هم به ازای هر z روی منحنی C قرار دارد.

مثال : فرض کنید $f(z) = e^z$ ، $|z| \leq 1$ ، نقاطی از این ناحیه را بیابید که به ازای آنها $|f(z)|$ مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود را اختیاری کند.

حل : e^z در ناحیه $|z| \leq 1$ تابعی تام است و هیچگاه صفر نمیشود. بنابراین طبق قضیه داریم :

$$|f(z)| = |e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| |e^{iy}| = |e^x| = e^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max |f(z)| = \max(e^x) \Rightarrow x = 1, y = 0 \\ \min |f(z)| = \min(e^x) \Rightarrow x = -1, y = 0 \end{cases}$$

که هر دو نقطه روی مرز دایره $|z| = 1$ قرار دارند.

فصل پنجم : سری مختلط، قضیه مانده ها و کاربرد آنها در حل انتگرال.

بخش اول : دنباله و سری های مختلط

بخش دوم : سری تیلور و لوران

بخش سوم : تکین ها و مانده ها

بخش چهارم : کاربرد قضیه مانده ها در حل انتگرال های حقیقی

بخش اول : دنباله و سری های مختلط

دنباله ها :

دنباله مختلط : تابع مختلطی که دامنه آن اعداد طبیعی و برد آن یک مجموعه غیر تهی مختلط باشد، مقادیر برد

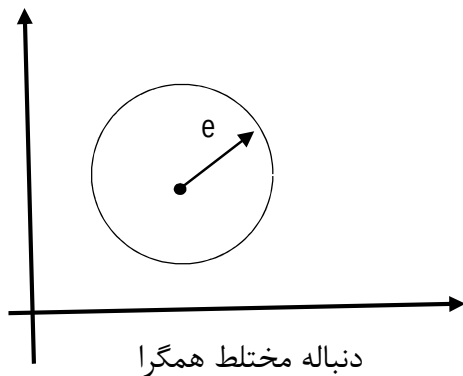
تابع را با $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ یا اختصاراً با $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ نمایش می دهیم.

به عبارت بهتر، دنباله ای به شکل $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ که $Z_k = x_k + iy_k$ یک دنباله مختلط است.

همگرایی : دنباله $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ را همگرا به C می گوئیم و می نویسیم $Z_n \rightarrow C$ هرگاه :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = C \text{ یعنی :}$$

$$\forall \epsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N \Rightarrow |z_n - C| < \epsilon$$



مثال : ثابت کنید دنباله $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ با $Z_n = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n}) + i(\frac{2}{n} + \frac{1}{n})$ به $C = 2 + i$ همگراست.

حل :

$$\text{جملات دنباله} \rightarrow 1 + 3i, \frac{3}{2} + 2i, \frac{5}{3} + \frac{5}{3}i, \dots$$

$$|z_n - c| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + i\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\right) - (2 + i) \right| = \left| -\frac{1}{n} + \frac{2}{n}i \right| = \frac{\sqrt{5}}{n} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{\sqrt{5}}{\epsilon}$$

مثال : دنباله زیرهمگرا به صفر است.

$$\left\{ \frac{i^n}{n} \right\} = \left\{ i, \frac{-1}{2}, \frac{-i}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

مثال : دنباله های زیر واگرا هستند.

$$\{i^n\} = \{i, -1, -i, 1, \dots\}$$

$$\{z_n\} = \{(1+i)^n\}$$

قضیه : دنباله ای از اعداد مختلط با جملات $z_n = x_n + iy_n$ برای $n = 1, 2, \dots$ همگرا به $C = x + iy$ است اگر و تنها اگر دنباله قسمت های حقیقی $x_1, x_2, \dots$ به x و دنباله قسمت های موهومی $y_1, y_2, \dots$ به y همگرا باشد.

مثال : همگرایی دنباله با جمله عمومی $z_n = \sin\left(\frac{p}{n}\right) + i(-1)^n$ را بررسی کنید.

حل :

$$x_n = \sin \frac{p}{n}, n \rightarrow \infty \Rightarrow \sin \frac{p}{n} \rightarrow 0.$$

$$y_n = (-1)^n, n \rightarrow \infty \Rightarrow y_n \rightarrow \pm 1$$

پس دنباله $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ واگراست و در نتیجه $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ واگرا می باشد.

سری ها : به ازای یک دنباله مفروض $z_1, z_2, \dots, z_n$ دنباله ای بصورت یک مجموع به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$S_1 = z_1$$

$$S_2 = z_1 + z_2$$

$\vdots$

$$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

این دنباله را دنباله حاصل جمع های جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ و $z_1, z_2, \dots$ را جملات سری می نامیم. دنباله فوق را

$$\text{نماد } S_n = \sum_{k=1}^n z_k \text{ نشان می دهیم.}$$

همگرایی سری : سری که دنباله حاصل از حاصل جمع های جزئی آن همگرا باشد، یعنی :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

به s ، مجموع یا مقدار سری می گوئیم :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots$$

سری واگرا : سری که همگرا نباشد.

قضیه : سری $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ با جملات $z_n = x_n + iy_n$ به $s = u + iv$ همگراست، اگر و تنها اگر $x_1 + x_2 + \dots$ به u و $y_1 + y_2 + \dots$ به v همگرا باشد.

مثال : همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ را بررسی کنید.

حل :

$$s_n = \sum_{k=0}^n z^k = 1 + z + z^2 + \dots + z^n \rightarrow \text{سری هندسی با قدرنسبت } z$$

$$\Rightarrow s_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad (s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q})$$

$$|z| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - z} \Rightarrow \text{سری واگراست}$$

$$|z| \geq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$$

به عنوان یک نتیجه از مطلب قبل :

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$$

حال اگر به جای z ، $-z$ قرار دهیم :

$$1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}, |z| < 1$$

تمام مطالب بالا زمانی معتبر است که شرط یعنی $|z| < 1$ برقرار باشد.

همگرایی یکنواخت : سری $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ را در نظر می گیریم و مجموع n جمله اول آن را با $S_n(z)$ نشان می دهیم.

این سری را در ناحیه R همگرایی یکنواخت به $S(z)$ است، هرگاه :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N; \forall z \in R, \forall n > N \Rightarrow |s(z) - s_n(z)| < \epsilon$$

قضیه (آزمون وایرستراس) : فرض کنیم سری $\sum_{k=1}^{\infty} m_k$ یک سری همگرا با جملات مثبت و ثابت $m_1, m_2, \dots$ باشد،

در این صورت، سری $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ در ناحیه R همگرایی یکنواخت است اگر به ازای هر $(z \in R)$ ، $|f_k(z)| \leq m_k$.

قضیه : (مشتق گیری جمله به جمله از سری) : اگر $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ به ازای هر $z \in R$ همگرایی یکنواخت به $S(z)$ بوده و تمام جملات $f_1(z), f_2(z), \dots$ در R تحلیلی باشند، آنگاه در هر نقطه داخل R داریم :

$$(S(z))' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(z) \quad (\text{مجموع مشتقات} = \text{مشتق کل مجموع})$$

مثال : سری تابع $\frac{1}{(1-z)^2}$ را بدست آورید.

حل :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots, |z| < 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1-z}\right)' = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}, |z| < 1$$

قضیه : (انتگرال گیری جمله به جمله از سری) : اگر $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ در ناحیه R همگرای یکنواخت بوده و در این ناحیه، تمام جملات $f_1, f_2, \dots$ پیوسته باشند و C یک منحنی در R باشد، آنگاه :

$$\oint_C \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \right] dz = \sum_{k=1}^{\infty} \oint_C f_k(z) dz$$

یعنی از جملات سری می توان جمله به جمله انتگرال گرفت.

مثال : سری تابع $\ln(1-z)$ را بدست آورید.

حل :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots, |z| < 1$$

$$\Rightarrow \int_c \frac{1}{1-z} dz = \int_c dz + \int_c z dz + \int_c z^2 dz + \dots$$

که منحنی C از $z = 0$ تا $z = z$ است.

$$\Rightarrow -\ln(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, |z| < 1$$

$$\Rightarrow \ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, |z| < 1$$

آزمون های همگرایی :

قضیه واگرایی : اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$. بنابراین هر سری که برای آن، این رابطه برقرار نباشد، واگراست.

تذکر : شرط فوق، شرط لازم برای همگرایی است نه کافی.

مثال : سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ در شرط فوق صدق می کند، اما واگراست.

آزمون نسبت :

$$L < 1 \Rightarrow \sum f_n \text{ همگرا}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| = L \Rightarrow L > 1 \Rightarrow \sum f_n \text{ واگرا}$$

$$L = 1 \Rightarrow \text{آزمون بی نتیجه}$$

نکته : معمولاً در بررسی سری های شامل فاکتوریل از آزمون نسبت استفاده می کنیم.

مثال : همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ را بررسی کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{n+1} \right| = 0 < 1$$

بنابراین سری همگراست.

آزمون ریشه :

$$L < 1 \Rightarrow \sum f_n \text{ همگراست}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|} = L \Rightarrow L > 1 \Rightarrow \sum f_n \text{ واگراست}$$

$$L = 1 \Rightarrow \text{آزمون بی نتیجه}$$

نکته : معمولاً در بررسی سری های شامل توان n ام از آزمون ریشه استفاده می کنیم.

مثال : همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n n!}{n^n}$ را بررسی کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2i)^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2i}{n} \sqrt[n]{n!} = 0 < 1 \rightarrow \text{سری همگراست}$$

آزمون مقایسه : فرض کنیم $f_n \leq g_n$ ، دراین صورت اگر:

$\sum g_n$ همگرا باشد $\leftarrow \sum f_n$ همگراست.

$\sum f_n$ واگرا باشد $\leftarrow \sum g_n$ واگراست.

شعاع همگرایی_ ناحیه همگرایی :

مثال ۱ : (همگرایی در یک قرص) قبلا دیدیم که سری هندسی :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots$$

به ازای $|z| < 1$ همگرا و به ازای $|z| \geq 1$ واگراست.

مثال ۲ : (همگرایی به ازای هر z) سری :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

به ازای هر z همگراست، زیرا :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z}{n+1} \right| = 0 < 1$$

مثال ۳ : (همگرایی فقط در مرکز) سری :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = 1 + 2z + 6z^2 + \dots$$

فقط در $z = 0$ همگرا و به ازای هر $z \neq 0$ واگراست، زیرا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |z|$$

$z = 0 \Rightarrow \text{حد} = 0 < 1 \Rightarrow$ سری همگرا

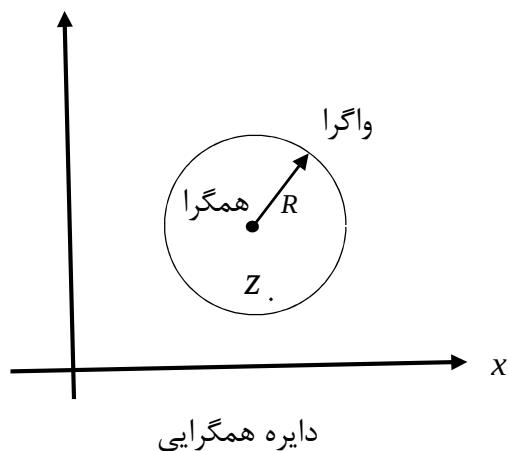
$z \neq 0 \Rightarrow \text{حد} = \infty \Rightarrow$ سری واگرا

فرض کنید R شعاع کوچکترین دایره به مرکز z باشد که شامل همه نقاطی است که سری در آنها همگراست

در این صورت به ازای تمام z هایی که در نامساوی $|z - z| < R$ صدق می کنند، سری همگراست.

چون R کوچکترین عدد ممکن است، سری به ازای تمام z هایی که در رابطه $|z - z| > R$ صدق می کنند، واگراست.

دایره $|z - z| = R$ را دایره همگرایی و شعاع R را همگرایی سری می نامند.



$R = \infty \Leftarrow$ سری به ازای هر z (یا بر کل صفحه مختلط) همگراست. (مانند مثال ۲).

$R = 0 \Leftarrow$ سری تنها در $z = z$ همگراست (مانند مثال ۳).

برای بدست آوردن شعاع همگرایی، از آزمون های همگرایی استفاده می کنیم.

$$R = \frac{1}{L} \quad (L \text{ حد مورد نظر در هر یک از آزمون ها بود})$$

مثال : ناحیه همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ را تعیین نمایید.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z}{n+1} \right| = 0.$$

$$R = \frac{1}{L} = \infty \Rightarrow \text{سری به ازای هر } Z \text{ همگراست.}$$

ناحیه همگرایی : $|z| < \infty$.

مثال : شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ را بیابید.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[(2(n+1))]!}{[(2n+2)]^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \right| = 4 \Rightarrow R = \frac{1}{4}$$

بخش دوم : سری های تیلور و لوران

قضیه تیلور : اگر تابع $f(z)$ در همسایگی $z = z_0$ تحلیلی باشد، آنگاه :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt$$

$$\text{تعمیم فرمول انتگرال کوشی} \rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$\Rightarrow f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots$$

سری فوق را سری تیلور تابع f حول $z = z_0$ می نامیم.

مثال : سری تیلور تابع $f(z) = \cos z$ را حول $z = \frac{p}{2}$ نوشته و دامنه همگرایی سری را تعیین کنید.

$$f(z) = \cos z \Rightarrow f\left(\frac{p}{2}\right) = \cos \frac{p}{2} = 0$$

$$f'(z) = -\sin z \Rightarrow f'\left(\frac{p}{2}\right) = -\sin \frac{p}{2} = -1$$

$$f''(z) = -\cos z \Rightarrow f''\left(\frac{p}{2}\right) = -\cos \frac{p}{2} = 0$$

⋮

$$\Rightarrow \cos z = f\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{f'\left(\frac{p}{2}\right)}{1!}\left(z - \frac{p}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{p}{2}\right)}{2!}\left(z - \frac{p}{2}\right)^2 + \dots$$

$$\cos z \text{ سری تیلور} \rightarrow \cos z = 0 + \frac{(-1)}{1!}\left(z - \frac{p}{2}\right) + \frac{0}{2!}\left(z - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{(-1)}{3!}\left(z - \frac{p}{2}\right)^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\gamma n - 1)!} \left(z - \frac{p}{\gamma}\right)^{\gamma n - 1}$$

محاسبه دامنه همگرایی :

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \left(z - \frac{p}{\gamma}\right)^{\gamma n + 1}}{(\gamma n + 1)!} \times \frac{(\gamma n - 1)!}{\left(z - \frac{p}{\gamma}\right)^{\gamma n - 1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(z - \frac{p}{\gamma}\right)^{\gamma}}{\gamma n (\gamma n + 1)} \right| = 0.$$

$$R = \frac{1}{L} = \infty \rightarrow \text{تابع به ازای هر } z \text{ همگراست.}$$

دامنه همگرایی : دایره ای به شعاع $|z| = r < \infty$ است.

سری مک لورن : اگر در سری تیلور تابع، قراردسیم $z_0 = 0$ ، سری حاصل را سری مک لورن

می نامند.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

بسط مک لورن چند تابع مهم :

$$1) e^z = 1 + \frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, |z| < \infty$$

$$2) \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, |z| < \infty$$

$$3) \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, |z| < \infty$$

$$4) \tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{\gamma z^5}{15} + \dots, |z| < \frac{p}{\gamma}$$

$$\delta) \sec z = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5z^4}{24}, |z| < \frac{\pi}{2}$$

$$\epsilon) \csc z = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + \dots, 0 < |z| < \pi$$

$$\gamma) \tan^{-1} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}, |z| < 1$$

$$\lambda) \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}, |z| < 1$$

$$\eta) (1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!} z^2 + \dots, |z| < 1$$

به عنوان مثال سری $\tan^{-1} z$ را حساب می کنیم :

سری $\text{Arctan } z$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, |z| < 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+z^2} dz = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \right] dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int z^{2n} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}, |z| < 1$$

سری لوران : اگر $f(z)$ در دامنه مورد نظرتحلیلی باشد $\leftarrow$ سری تیلور.

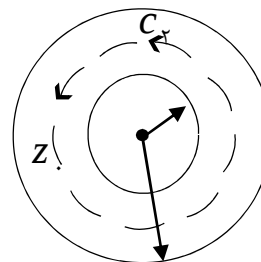
اگر تابع $f(z)$ حول نقاطی نظیر $z = z_0$ تحلیلی نباشد $\leftarrow$ سری لوران.

قضیه لوران : اگر تابع $f(z)$ روی دو دایره هم مرکز C_1, C_2 و داخل طوق بین آنها تحلیلی و z نقطه ای داخل این دو طوق باشد، آنگاه :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{1-n}} dt$$



C منحنی بسته ای واقع در طوق است بطوریکه دایره $|z - z_0| = r_1$ را احاطه کرده است.

مانده : در سری لوران تابع f ، b را مانده f در نقطه z_0 می نامیم، و با $\text{Res}(f, z_0)$ نشان می دهیم.

بخش اصلی : قسمت دوم سری لوران یعنی جملات شامل b_n را بخش اصلی سری می نامیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$$

تذکر : سری لوران تابع f را می توان به صورت زیرنیزنوشت :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^{-n}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

مثال : سری لوران $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ را در نواحی زیر به دست آورید.

الف) حول $z_0 = 0$ و در ناحیه $0 < |z| < 1$.

ب) حول $z_0 = 0$ و در ناحیه $1 < |z| < \infty$.

حل :

$$\text{الف) } 0 < |z| < 1 \Rightarrow \frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z-1} \right) = \frac{-1}{z} (1 + z + z^2 + \dots) = \frac{-1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots$$

$$\Rightarrow b_0 = -1, \quad b_n = 0, \quad n = 2, 3, \dots, \quad \forall n a_n = -1$$

$$\text{ب) } 1 < |z| < \infty \Rightarrow \frac{1}{|z|} < 1 \Rightarrow \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$$

$$\Rightarrow \forall n a_n = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_n = 1, \quad n = 2, 3, \dots$$

مثال : سری لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ را حول نقطه $z = 0$ در حالت های زیر بنویسید.

$$\text{الف) } 0 < |z| < 1$$

$$\text{ب) } 1 < |z| < 2$$

$$\text{ج) } |z| > 2$$

حل :

$$\text{الف) : } f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{1}{z} + \frac{(-1)}{z-1} + \frac{\frac{1}{2}}{z-2}$$

$$= \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2(z-2)} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2(-2)(1-\frac{z}{2})}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \right), \quad |z| < 1$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{1}{2}, \forall n \neq 1, b_n = 0, a_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{ب) } 1 < |z| < 2 \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| < 1, \left| \frac{z}{2} \right| < 1$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2(z-2)} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{(-z)(1-\frac{1}{z})} + \frac{1}{2(-2)(1-\frac{z}{2})} \\ &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{(z)(1-\frac{1}{z})} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \frac{1}{2z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} \end{aligned}$$

$$a_n = -\frac{1}{2^{n+1}} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, b_1 = \frac{1}{2}, b_n = -1, n \neq 1$$

$$\text{ج) } |z| > 2 \Rightarrow \left| \frac{2}{z} \right| < 1, |z| > 2 > 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{z} \right| < 1$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{2z(1-\frac{2}{z})} \\ &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n-1} - 1) z^{-(n+1)} \end{aligned}$$

$$\forall a_n = 0, b_1 = \frac{1}{2}, b_n = 2^{n-1} - 1, n \neq 1$$

نتیجه : فرض کنید تابع $f(z)$ بروی دایره C و نقاط داخل آن به جز نقطه z تحلیلی باشد، دراینصورت:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i b_1$$

برهان : اما نتیجه قبل ازروابط زیربدست می آید :

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} \right] dz$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_C (z-z_0)^n dz + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \oint_C (z-z_0)^{-n} dz = 2\pi i b_1$$

$$\oint_C (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$$

مثال : حاصل $\oint_C \frac{\sinh z}{z^4} dz$ را بیابید، وقتی C مرز دایره $|z|=1$ است.

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$f(z) = \frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} + \frac{z^3}{7!} + \dots \Rightarrow b_1 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$\oint_C \frac{\sinh z}{z^4} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{3} i$$

بخش سوم : تکین ها و مانده ها

تعریف : صفر مرتبه m ام : تابع تحلیلی $f(z)$ در Z دارای صفر مرتبه m است، هرگاه :

$$f(z) = f'(z) = f''(z) = \dots = f^{(m-1)}(z) = 0, f^{(m)}(z) \neq 0$$

مثال : $z = 0$ صفر مرتبه اول تابع $f(z) = z$ است زیرا :

$$f(z) = z, f'(z) = 1 \Rightarrow f(0) = 0, f'(0) \neq 0$$

یعنی یک کوچکترین عددی است که مشتق مرتبه یک در نقطه صفر، مخالف صفر شده است.

مثال : $z = 0$ صفر مرتبه n ام تابع مختلط $f(z) = z^n$ می باشد زیرا :

$$f(z) = z^n, f'(z) = nz^{n-1}, \dots, f^{(n)}(z) = n(n-1)\dots \times 2 \times 1 \neq 0$$

قضیه : $z = Z_0$ صفر مرتبه m ام تابع $f(z)$ است اگر و تنها اگر : $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$

که $g(z)$ در Z_0 تحلیلی و غیر صفر است.

مثال :

$$f(z) = z^n = (z - 0)^n (1) \Rightarrow z = 0 \text{ صفر مرتبه } n \text{ام}$$

$$f(z) = (z-1)^z e^z \Rightarrow z = 1 \text{ صفر مرتبه سوم}$$

تکین : نقطه ای که تابع در آن تحلیلی نیست.

تکین تنها : نقطه تکینی که در همسایگی آن هیچ نقطه تکین دیگری وجود ندارد.

انواع نقاط تکین تنها :

الف) اگر بخش اصلی سری لورن صفر باشد، یعنی به ازای هر n ، $b_n = 0$ ، به آن نقطه تکین برداشتنی

می گوییم.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ب) اگر بخش اصلی، شامل تعداد متناهی جمله باشد، یعنی از مرتبه ای به بعد، b_n ها صفر باشند، به آن یک قطب می گوییم.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + b_1 (z-z_0)^{-1} + b_2 (z-z_0)^{-2} + \dots + b_m (z-z_0)^{-m}$$

مرتبه قطب : توان آخرین جمله غیر صفر در بخش اصلی سری (m در قسمت بالا).

قطب ساده : قطب مرتبه یک ($m=1$) باشد.

قضیه : تابع $\frac{1}{g(z)}$ در $z = z_0$ قطب مرتبه m دارد، اگر و تنها اگر $g(z)$ در $z = z_0$ صفر مرتبه m داشته باشد.

ج) اگر بخش اصلی شامل تعداد نامتناهی جمله باشد، یعنی به ازای هر n ، $b_n \neq 0$ باشد آن را تکین اساسی می گوییم :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$$

در مطالب چند صفحه قبل دقت کردید که انواع نقاط تکین بر اساس تعداد جملاتی است که در بخش اصلی سری f لوران وجود می آید.

مثال : نقطه $z = 0$ نقطه تکین برداشتنی برای تابع e^z می باشد، زیرا :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, |z| < \infty$$

$$\Rightarrow \forall n, b_n = 0, a_n = \frac{1}{n!}$$

مثال : تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z^6}$ در $z = 0$ قطب مرتبه ۵ دارد :

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z} - \frac{z}{7!} + \dots$$

$$n = 1, 2, \dots \Rightarrow b_n = 0$$

مثال : تابع $f(z) = e^z$ و در $z = 0$ تکین اساسی دارد :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots \Rightarrow \forall n, b_n \neq 0$$

روش محاسبه مانده (b_1) :

(۱) اگر z قطب مرتبه m باشد.

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]^{(m-1)}$$

مثال : فرض کنید $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$. داریم :

$$z^2 - 1 = 0 \Rightarrow z = \pm 1 \rightarrow \text{نقاط تکین}$$

$$(z^2 - 1)^2 = ((z-1)(z+1))^2 = (z-1)^2 (z+1)^2 \rightarrow f \text{ در } \pm 1 \text{ قطب مرتبه ۲ دارد}$$

$$z_0 = 1 \Rightarrow b_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1)^2 \frac{1}{(z^2-1)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(z+1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} \left(-\frac{2}{(z+1)^3} \right) = -\frac{1}{4}$$

$$z_0 = -1 \Rightarrow b_1 = \lim_{z \rightarrow -1} \left[(z+1)^2 \frac{1}{(z^2-1)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{1}{(z-1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow -1} \left(-\frac{2}{(z-1)^3} \right) = \frac{1}{4}$$

(۲) اگر z قطب ساده باشد :

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

مثال : برای $f(z) = \frac{z^2+1}{z+1}$ داریم :

قطب ساده $z + 1 = 0 \Rightarrow z = -1 \rightarrow$

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow -1} \left[(z+1) \frac{z^2 + 1}{z + 1} \right] = \lim_{z \rightarrow -1} z^2 + 1 = 2$$

(۳) اگر z تکین اساسی باشد، مانده با بسط تابع حول $z = z_0$ و تعیین ضریب $\frac{1}{z - z_0}$ محاسبه می شود.

مثال : دیدیم که تابع $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ در $z = 0$ تکین اساسی دارد. اما داریم :

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \Rightarrow b_1 = 1$$

(۴) اگر تابع f در $z = z_0$ دارای قطب ساده باشد و بتوان آن را بصورت $f(z) = \frac{p(z)}{Q(z)}$ نوشت که $Q'(z_0) \neq 0, Q(z_0) = 0, p(z_0) \neq 0$ آنگاه :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{Q'(z_0)}$$

(۵) اگر در قسمت قبل، $f(z)$ در z_0 دارای قطب مرتبه دو باشد، یعنی $Q(z_0) = Q'(z_0) = 0$ ولی $Q''(z_0) \neq 0$ ، آنگاه :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{[Q''(z_0)]^2} (p'(z_0)Q''(z_0) - p(z_0)Q'''(z_0))$$

قضیه مانده ها : اگر تابع $f(z)$ داخل و روی مرز C جز در تعداد متناهی نقطه $z_1, z_2, \dots, z_n$ تحلیلی باشد، آنگاه :

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) \right)$$

مثال : حاصل $\oint_C \frac{z dz}{(z^2 + 1)(z^2 - 1)^2}$ را بدست آورید، که C دایره $|z - 1| = \sqrt{3}$ است.

قطب ساده $z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i \rightarrow$

$$(z^r - 1)^r = 0 \Rightarrow (z-1)^r (z+1)^r = 0 \rightarrow z = \pm 1 \rightarrow \text{قطب مرتبه دو}$$

$z = -1$ خارج از دایره است بنابراین :

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i) + \text{Res}(f, 1))$$

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i) \frac{z}{(z^r+1)(z^r-1)^r} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z}{(z+i)(z^r-1)^r} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \left[(z+i) \frac{z}{(z^r+1)(z^r-1)^r} \right] = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z}{(z-i)(z^r-1)^r} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \frac{z}{(z^r+1)(z^r-1)^r} \right]' = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z}{(z^r+1)(z^r+1)^r} \right] = -\frac{1}{\lambda}$$

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} i$$

مثال : حاصل $\oint_C \frac{z^r+1}{z^r(z+1)} dz$ را محاسبه کنید که در آن C دایره $|z|=2$ است.

$$z^r(z+1) = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ و } z = -1 \text{ و قطب مرتبه دو}$$

$$\text{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \left[(z+1) \frac{z^r+1}{z^r(z+1)} \right] = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^r+1}{z^r} = 2$$

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[(z^r) \frac{z^r+1}{z^r(z+1)} \right]' = -1$$

$$\Rightarrow \oint \frac{z^r+1}{z^r(z+1)} dz = 2\pi i (2-1) = 2\pi i$$

نکته : اگر تابع $f(z)$ داخل و روی منحنی بسته C جز در تعداد متناهی از قطب ها تحلیلی باشد، به علاوه $f(z)$ روی C صفر یا قطبی نداشته باشد آنگاه :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

که N تعداد صفرها و P تعداد قطب های $f(z)$ درون C است.

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (N - P)$$

با ضرب طرفین در $2\pi i$:

مثال: حاصل $\oint_C \cot p z dz$ را بیابید که در آن C دایره $|z| = p$ می باشد.

$$\oint_C \cot p z dz = \oint_C \frac{\cos p z}{\sin p z} dz$$

نقاطی که داخل دایره C هستند $\rightarrow z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \Rightarrow \sin p z = 0$

$f(z)$ هیچ قطبی ندارد. بنابراین $N = 0, P = 7$ داریم:

$$\oint_C \frac{\cos p z}{\sin p z} dz = 2\pi i (0 - 7) = -14\pi i$$

بخش چهارم : کاربرد قضیه مانده ها در حل انتگرال های حقیقی

الف) محاسبه $\int_{\gamma}^{\gamma p} R(\cos q, \sin q) dq$ که R تابعی کسری است.

$$\sin q = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}, \cos q = \frac{z^n + z^{-n}}{2i}$$

$$z = e^{iq} \Rightarrow dz = ie^{iq} dq = iz dq \Rightarrow dq = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_{\gamma}^{\gamma p} R(\cos q, \sin q) dq = \oint_C f(z) dz$$

که C دایره $|z| = 1$ می باشد.

مثال : حاصل انتگرال حقیقی $\int_{\gamma}^{\gamma p} \frac{dq}{13 + 12 \cos q}$ را به دست آورید.

$$\cos q = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$$13 + 12 \cos q = 13 + 6 \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{6z^2 + 13z + 6}{z}, dq = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_{\gamma}^{\gamma p} \frac{dq}{13 + 12 \cos q} = \frac{1}{i} \oint_C \frac{dz}{6z^2 + 13z + 6} = -i \oint_C \frac{dz}{(3z+2)(2z+3)}$$

$$(3z+2)(2z+3) = 0 \Rightarrow z = -\frac{2}{3}, z = -\frac{3}{2}$$

فقط $z = -\frac{2}{3}$ داخل دایره $|z| = 1$ قرار دارد.

$$\text{Res}(f, -\frac{2}{3}) = \lim_{z \rightarrow -\frac{2}{3}} \left[\left(z + \frac{2}{3} \right) \frac{1}{(3z+2)(2z+3)} \right] = \lim_{z \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{1}{3(2z+3)} = \frac{1}{5}$$

$$\int_{\gamma}^{\gamma p} \frac{dq}{13 + 12 \cos q} = -i \oint_C \frac{dq}{(3z+2)(2z+3)} = -i (\gamma p i \text{Res}(f, -\frac{2}{3})) = \gamma p \left(\frac{1}{5} \right) = \frac{\gamma p}{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 q}{5 - 4 \cos q} dq = \frac{p}{\lambda} \quad \text{مثال : نشان دهید}$$

راهنمایی (انتگرال از صفر تا p بالا ، نصف انتگرال از صفر تا $2p$ است یعنی $\frac{p}{2}$).

$$\sin q = \frac{z^n - z^{-n}}{2i} = \frac{z^n - 1}{2iz}, \cos q = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, dq = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 q}{5 - 4 \cos q} dq = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 q}{5 - 4 \cos q} dq = -\frac{i}{\lambda} \oint_C \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2(2z-1)(z-2)} dz$$

$$z^2(2z-1)(z-2) = 0 \Rightarrow z^2 = 0 \Rightarrow z = 0 \rightarrow \text{قطب مرتبه دوم}$$

$$2z - 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{2} \rightarrow \text{قطب ساده} \quad \text{و} \quad z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2 \rightarrow \text{قطب ساده (خارج از مسیر)}$$

$$\text{Res}(f, \frac{1}{2}) = \frac{\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2(z-2)}}{(2z-1)'} \bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{1}$$

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[(z^2) \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2(2z-1)(z-2)} \right]' = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 q}{5 - 4 \cos q} dq = \frac{-i}{\lambda} \oint_C \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2(2z-1)(z-2)} dz = \frac{-i}{\lambda} (2\pi i) \left(-\frac{3}{1} + \frac{5}{4} \right) = \frac{p}{\lambda}$$

ب) محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} dx$ که $p(x)$ و $Q(x)$ چند جمله ای هستند.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{Q(x)} dx \quad (1) \text{ قرار می دهیم :}$$

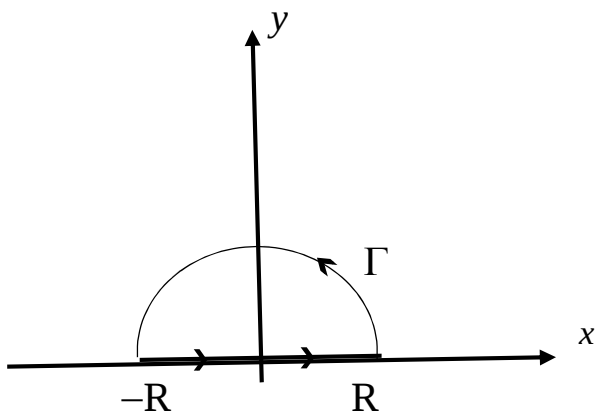
تذکر : در این مرحله، اگر هدف، محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} dx$ و تابع داخل انتگرال زوج باشد داریم :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} dx = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{Q(x)} dx$$

$$f(z) = \frac{p(x)}{Q(x)}$$

(۲) تعریف تابع مختلط متناظر با تابع زیرانتگرال :

(۳) انتخاب مسیر ساده و بسته C :



$$\oint_C f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{Q(x)} dx$$

(۴) محاسبه تکین های f و تشخیص آن هایی که درون مسیر C هستند. (برای شکل بالا فقط بالای محور x).

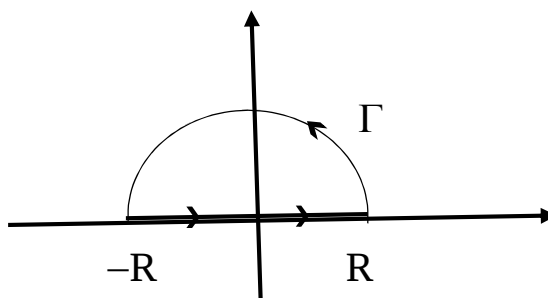
(۵) محاسبه $\oint_C f(z) dz$ با استفاده از قضیه مانده ها.

(۶) با استفاده از نامساوی ML نشان می دهیم :

$$\oint_C f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{Q(x)} dx \quad (۷) \text{ قرار می دهیم :}$$

توجه : مقدار $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{Q(x)} dx$ را مقدار اصلی کوشی انتگرال نامیده و با $P.V.$. C نشان می دهیم.

مثال : مقدار $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$ را محاسبه کنید.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^r}{x^r + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^r}{x^r + 1} dx$$

$$f(z) = \frac{z^r}{z^r + 1}$$

$$z^r + 1 = 0 \Rightarrow z^r = -1 \Rightarrow z_k = \left(\cos \frac{rk\pi + \pi}{r} + i \sin \frac{rk\pi + \pi}{r} \right)$$

$$z_0 = e^{\frac{p_i}{r}}, z_1 = e^{\frac{rp_i}{r}}, z_r = e^{\frac{\Delta p_i}{r}}, z_r = e^{\frac{rp_i}{r}}$$

فقط z_0 و z_r در نیم دایره $|z| = R$ قرار دارند (جواب های نیم صفحه فوقانی).

$$\oint_c \frac{z^r}{z^r + 1} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_r))$$

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{Q'(z_0)} = \frac{z_0^r}{rz_0^{r-1}} \bigg|_{z_0 = e^{\frac{p_i}{r}}} = \frac{1}{re^{\frac{p_i}{r}}} = \frac{1}{r\sqrt{r}(1+i)}$$

$$\text{Res}(f, z_r) = \frac{p(z_r)}{Q'(z_r)} = \frac{1}{rz} \bigg|_{z = e^{\frac{rp_i}{r}}} = \frac{1}{r\sqrt{r}(-1+i)}$$

$$\Rightarrow \oint_c \frac{z^r}{z^r + 1} dz = \frac{p}{\sqrt{r}}$$

نشان می دهیم $\int_{\Gamma} \frac{z^r}{z^r + 1} dz = 0$.

$$z = Re^{iq} dz = Rie^{iq} dq = \left| \int_{\Gamma} \frac{z^r}{z^r + 1} dz \right| = \left| \int_0^p \frac{R^r e^{riq}}{R^r e^{riq} + 1} (Rie^{iq} dq) \right|$$

$$= \left| \int_0^p \frac{R^r e^{riq}}{R^r e^{riq} + 1} dq \right| \leq \int_0^p \frac{R^r}{R^r - 1} dq = \frac{pR^r}{R^r - 1} \rightarrow 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^r}{x^r + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^r}{x^r + 1} dx = \oint_c \frac{z^r}{z^r + 1} dz = \frac{p}{\sqrt{r}}$$

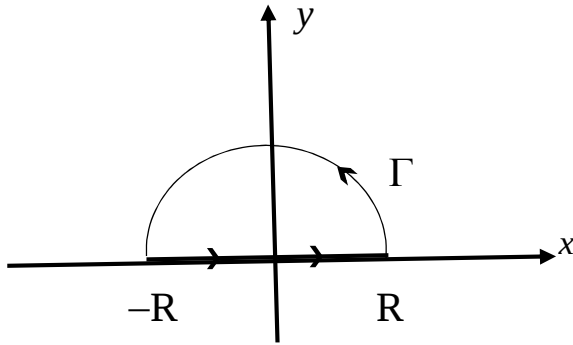
بطور خلاصه اگر بخواهیم $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} dx$ را حساب کنیم، اول به جای x ها میگذاریم z تابع $f(z) = \frac{p(z)}{Q(z)}$ نقاط غیر تحلیلی تابع (ریشه های $Q(z)$) را محاسبه می کنیم، آن ریشه هایی را در نظر می گیریم که در مسیر باشند (برای این مثال صفحه فوقانی)، مانده f را در آنها محاسبه می کنیم، مجموع آنها را در $2\pi i$ که ضرب کنیم، جواب انتگرال حقیقی بدست می آید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} \sin ax dx \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} \cos ax dx$$

(ج) محاسبه انتگرال های

$$f(z) = \frac{p(z)}{Q(z)} e^{iaz} \quad (1) \quad \text{یافتن تابع مختلط مناسب به شکل}$$

$$\oint_C f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z) dx \quad (2) \quad \text{انتخاب مسیر مناسب:}$$



(3) پیدا کردن، تکین های f که داخل مسیر مورد نظر هستند.

(4) محاسبه $\oint_C f(z) dz$ با استفاده از قضیه مانده ها.

(5) نشان می دهیم وقتی $R \rightarrow \infty$ ، $\int_{\Gamma} f(z) dz \rightarrow 0$.

(6) جایگذاری مقادیر به دست آمده به صورت زیر:

$$\oint_C f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{Q(x)} e^{iax} dx$$

(به طور خلاصه هر زمان خواستیم $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(z)}{Q(z)} e^{iax} dz$ را حساب کنیم، اول به جای همه x ها z می گذاریم، پس

$$f(z) = \frac{p(z)}{Q(z)} e^{iaz}, \quad \text{سپس نقاط تکین } f \text{ را بدست می آوریم.}$$

فصل پنجم (بخش چهارم - کاربرد قضیه مانده ها در حل انتگرال های حقیقی)

نقاطی که در مسیر وجود دارد دارند را انتخاب، مانده f را در آنها محاسبه کرده، مجموع مانده ها ضرب در $2\pi i$ می شود جواب.)

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{Q(x)} e^{iax} dx = g + bi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} (\cos ax + i \sin ax) dx = g + bi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} \cos ax dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} \sin ax dx = g + bi$$

(۷) مساوی قرار دادن قسمت های حقیقی و موهومی طرفین عبارت اخیر با یکدیگر :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos ax dx = g$$

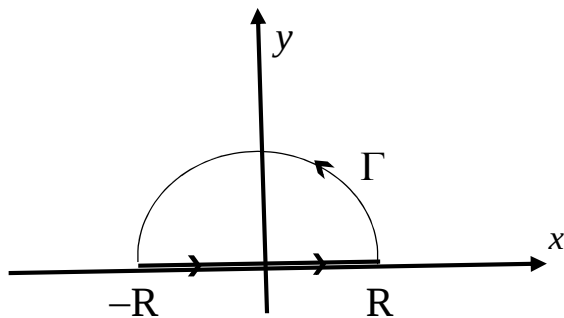
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(z)}{Q(z)} \sin ax dx = b$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{p}{e} \sin 1$$

مثال : ثابت کنید

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 2z + 2}$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = 1 \pm i$$



فقط $z = 1 + i$ در نیم صفحه فوقانی قرار دارد

$$\oint_c \frac{e^{iz}}{z^2 - 2z + 2} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, 1+i)) = 2\pi i \left(\frac{e^{iz}}{2z - 2} \Big|_{z=1+i} \right)$$

$$\operatorname{Res}_{\sqrt{1}}(e^{i-\sqrt{1}}) = p e^{i-\sqrt{1}} = \frac{p}{e} (\cos 1 + i \sin 1) = \left| \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 - 2z + 1} dz \right| \leq \frac{pR}{R^2 - 2R - 2}$$

اگر $R \rightarrow \infty$ ، آنگاه $\frac{pR}{R^2 - 2R - 2}$ بنابرین :

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 - 2z + 1} dz = \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 - 2z + 1} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 - 2x + 1} dx$$

$$\frac{p}{e} (\cos 1 + i \sin 1) = 0 + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 - 2x + 1} dx$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 - 2x + 1} dx = \frac{p}{e} (\cos 1 + i \sin 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\cos x + i \sin x}{x^2 - 2x + 1} dx = \left(\frac{p}{e} \cos 1 \right) + i \left(\frac{p}{e} \sin 1 \right)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 1} dx = \frac{p}{e} \sin 1$$

لم جردن : برای محاسبه $\int_{\Gamma} e^{iaz} g(z) dz$ درانتگرال های فوق، می توانیم ازلم زیراستفاده می کنیم:

اگر $|g(z)| \rightarrow 0$ وقتی $|z| \rightarrow \infty$ ، آنگاه برای $a > 0$ داریم :

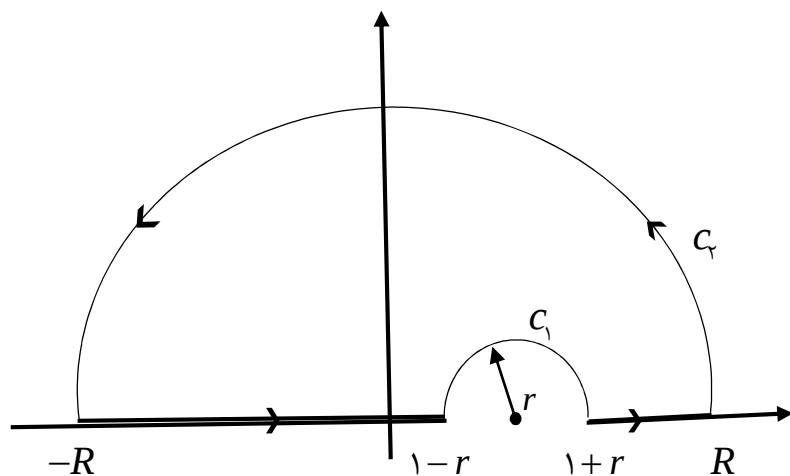
$$\int_{\Gamma} e^{iaz} g(z) dz$$

زمانی که $R \rightarrow \infty$.

(د) انتگرال های ناسره : توابع مثلثاتی با قطب های حقیقی این انتگرال ها مشابه حال (ج) هستند، با این تفاوت که دراین حالت به ازای برخی نقاط روی محور x ها، $Q(x) = 0$.

این نوع انتگرال را با ایجاد تورفتگی روی منحنی در آن قسمت که شامل نقطه تکین است، بررسی می کنیم، یعنی نیم دایره ای به مرکز نقطه تکین و شعاع r از مسیر جدا کرده و درحد حاصل انتگرال را وقتی $r \rightarrow 0$ محاسبه می کنیم.

مثال : حاصل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x-1} dx$ را محاسبه کنید. $f(z) = \frac{e^{iz}}{z-1}, z-1=0 \Rightarrow z=1$ قطب



$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{1-r} \frac{e^{ix}}{x-1} dx + \oint_{C_r} \frac{e^{iz}}{z-1} dz + \int_{1+r}^R \frac{e^{ix}}{x-1} dx + \oint_{C_R} \frac{e^{iz}}{z-1} dz = 0 \rightarrow \text{قضیه کوشی}$$

C_r نیم دایره $|z-1|=r$ و C_R نیم دایره $|z|=R$ است. حال به محاسبه تک تک انتگرال های فوق می پردازیم :

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z-1} dz = -\pi i f(1) = -\pi i e^i \rightarrow \left| \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z-1} dz \right| \leq \int_{C_r} \left| \frac{e^{iz}}{z-1} \right| dz \leq \frac{1}{R-1} \rightarrow 0$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \left[\int_{-R}^{1-r} \frac{e^{ix}}{x-1} dx + \int_{1+r}^R \frac{e^{ix}}{x-1} dx \right] - i\pi e^i = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x-1} dx = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \left[\int_{-R}^{1-r} \frac{e^{ix}}{x-1} dx + \int_{1+r}^R \frac{e^{ix}}{x-1} dx \right] = i\pi e^i = i\pi (\cos 1 + i \sin 1) = -\pi \sin 1 + i\pi \cos 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x-1} dx = -\pi \sin 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x-1} dx = \pi \cos 1 \end{cases}$$

فصل ششم : (آخرین مباحث توابع مختلط) نگاشت همدیس و کاربردهای آن

بخش اول : نگاشت همدیس

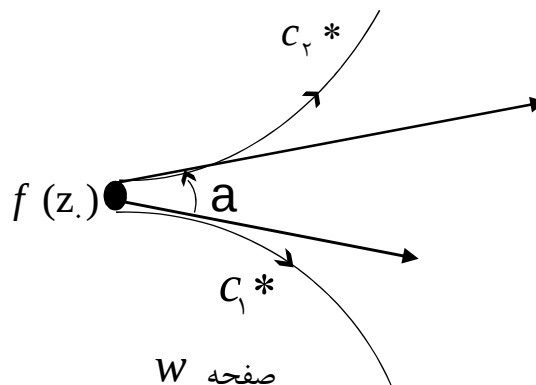
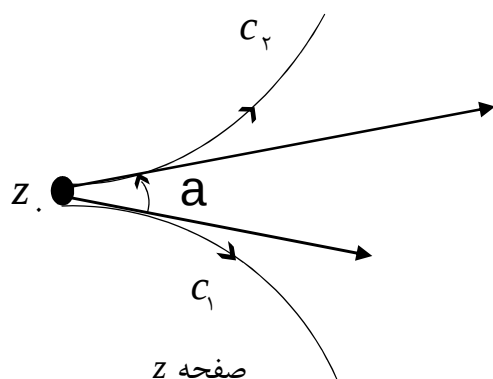
بخش دوم : نگاشت های کسری خطی خاص و کاربردهای نگاشت همدیس

بخش اول : نگاشت همدیس :

نگاشت همدیس : نگاشت $W=f(z)$ از D در صفحه z به D' در صفحه w را همدیس گوئیم هرگاه :

(۱) زاویه بین دو منحنی را حفظ کند.

(۲) جهت منحنی ها تحت این نگاشت تغییر نکند.



محک همدیس بودن یک نگاشت :

قضیه : اگر $f(z)$ در D تحلیلی و در هر نقطه داخل آن $f'(z) \neq 0$ ، آنگاه نگاشت f همدیس است.

مثال : نگاشت $w=e^z$ همدیس است زیرا :

$$w = e^z \Rightarrow w' = e^z \neq 0$$

مثال : نگاشت $w=z^{-3}$ در دامنه اش همدیس است.

$$w = z^{-3} \Rightarrow w' = -3z^{-4}$$

w' به ازای $z=0$ تعریف نشده است چون $z=0$ جزء دامنه نیست، پس w همدیس است.

مثال : نگاشت $w=z^n, (n=2,3,...)$ در تمام نقاط، غیر از $z=0$ همدیس است:

$$w = z^n \Rightarrow w' = nz^{n-1}, z \neq 0 \Rightarrow w' \neq 0$$

تبدیلات کسری خطی : تبدیل دو خطی (تبدیل موبیوس) :

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc \neq 0$$

$d, c, b, a \leftarrow$ اعداد مختلط یا حقیقی.

$$w' = \frac{a(az+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}, ad-bc \neq 0 \Rightarrow w' \neq 0.$$

بنابراین این نگاشت یک نگاشت همدیس است.

حالت های خاص تبدیل موبیوس :

۱) $ad-bc=0 \Rightarrow w =$ تابع ثابت

یعنی هر نقطه از صفحه z به روی یک نقطه از صفحه w نگاشته می شود.

۲) $c=0 \Rightarrow w = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \rightarrow$ نگاشت خطی

۳) $c \neq 0, ad-bc \neq 0 \Rightarrow w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2(z+\frac{d}{c})}$

که دنباله ای از نگاشت های زیراست :

(الف) $z_1 = z + \frac{d}{c}$ (انتقال) و (ب) $z_2 = \frac{1}{z_1}$ (انعکاس)

(ج) $z_3 = \frac{bc-ad}{c^2} z_2$ (دوران، انبساط یا انقباض) و (د) $z_4 = \frac{a}{c} + z_3$ (انتقال)

یادآوری : صفحه مختلط توسعه یافته : صفحه مختلط به انضمام نقطه بی نهایت

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

دقیقا یک عدد مختلط w متناظر می شود. $\forall z, cz+d \neq 0 \rightarrow$

$z = -\frac{d}{c} \Rightarrow w = \infty \rightarrow$ تصویر نقطه $z = -\frac{d}{c}$ است.

حال اگر z را بر حسب w بنویسیم، خواهیم داشت :

$$z = \frac{b-dw}{cw-a}$$

$$w = \frac{a}{c} \Rightarrow z = \infty \rightarrow \text{تصویر نقطه } w = \frac{a}{c} \text{ است.}$$

بنابراین تبدیل موبیوس، یک نگاشت یک به یک و همدیس از صفحه z توسعه یافته به صفحه w توسعه یافته می باشد.

قضیه : تحت نگاشت دوخطی، تصویر هر دایره یا خط راست، یک دایره یا خط راست می باشد.

مثال : نشان دهید تصویر دوخط ثابت $y=b, x=a$ تحت نگاشت $w = \frac{4z-1}{z-2-i}$ دو دایره عمود برهم می باشد.

$$w = \frac{4z-1}{z-2-i} \Rightarrow z = \frac{(2+i)w+1}{w-4}$$

$$z = x + iy, w = u + iv \Rightarrow x + iy = \frac{(2+i)(u+iv)+1}{u+iv-4}$$

$$x = \frac{2(u^2+v^2)-vu+4v-4}{u^2+v^2-\lambda u+16}, y = \frac{u^2+v^2-4u-9v}{u^2+v^2-\lambda u+16}$$

$$x=a \Rightarrow \frac{2(u^2+v^2)-vu+4v-4}{u^2+v^2-\lambda u+16} = a \Rightarrow 2u^2+2v^2-vu+4v-4=a(u^2+v^2-\lambda u+16)$$

$$a=2 \Rightarrow 9u+4v=36 \rightarrow \text{معادله یک خط}$$

$$a \neq 2 \Rightarrow \left(u - \frac{\lambda a - 4}{2a - 4}\right)^2 + \left(v - \frac{2}{a - 2}\right)^2 = \frac{9}{4(a - 2)^2} \rightarrow \text{معادله یک دایره}$$

$$y=b \Rightarrow u^2+v^2-4u-9v=b(u^2+v^2-\lambda u+16)$$

$$b=1 \Rightarrow 4u-9v=16 \rightarrow \text{معادله یک خط}$$

$$b \neq 1 \Rightarrow \left(u - \frac{4b-2}{b-1}\right)^2 + \left(v + \frac{9}{2b-2}\right)^2 = \frac{9}{4(b-1)^2} \rightarrow \text{معادله یک دایره}$$

حال، نقطه برخورد دو خط حاصل عمود برهم را به دست می آوریم :

$$\begin{cases} 9u + 4v = 36 \\ 9u - 9v = 16 \end{cases} \Rightarrow u = 4, v = 0$$

بنابراین $p(4,0)$ نقطه تماس بین این دوخط است.

نقطه p ، درست نقطه تماس این خطوط با دایره متناظر با آن هاست و در نتیجه دودایره به دست آمده، عمود برهم می باشند.

تعیین یک تبدیل دوخطی خاص : برای تعیین یک تبدیل یک دو خطی خاص، باید ثابت های d, c, b, a داده شوند. باتوجه به رابطه زیر، سه شرط برای تعیین این تبدیل کافی است :

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} \left[\frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} \right]$$

قضیه : تنها یک تبدیل دوخطی وجود دارد که همواره سه نقطه متمایز Z_3, Z_2, Z_1 را به ترتیب روی نقاط متمایز W_3, W_2, W_1 می نگارد و با رابطه زیر تعریف می شود :

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

مثال : تبدیل دوخطی بیابید که سه نقطه $z_3 = 0, z_2 = i, z_1 = \infty$ را بر روی نقاط $w_3 = \infty, w_2 = i, w_1 = 0$ می نگارد.

$$\frac{(w-0)(i-w_3)}{(w-w_3)(i-0)} = \frac{(z-z_1)(i-0)}{(z-0)(i-z_1)}$$

با تقسیم طرفین بر W_3, Z_1 (چون هر دو ∞ هستند) :

$$\frac{w(\frac{i}{w_3} - 1)}{(\frac{w}{w_3} - 1)i} = \frac{(\frac{z}{z_1} - 1)i}{z(\frac{i}{z_1} - 1)} \Rightarrow z_1 \rightarrow \infty, w_3 \rightarrow \infty \Rightarrow -\frac{1}{z}$$

بخش دوم : نگاشت های کسری خاص و کاربرد نگاشت های همدیس :

فرض کنید بخواهیم تبدیل دو خطی را بیابیم که نیم صفحه $y \geq 0$ (صفحه فوقانی و خط محور x ها) را به روی $|w| \leq 1$ (دایره واحد و روی دایره) نگاشت کند.

هرتبدیل دو خطی، خط راست را بر روی دایره یا خط راست نگاشت می کند. بنابراین باید خط $y = 0$ به دایره $|w| = 1$ تبدیل شود.

$z = 0, \infty$ روی خط $y = 0$ (چون روی خط $y = 0$ ، $z = 0$ و $z = \infty$ را داریم)

$$\Rightarrow \begin{cases} |w| = \left| \frac{az + b}{cz + d} \right| & \Rightarrow |b| = |d| \\ |w| = \left| \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \right| & \Rightarrow |a| = |c| \end{cases}$$

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} \left[\frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} \right]$$

$$z_1 = -\frac{b}{a}, \quad z_2 = -\frac{d}{c}, \quad \frac{a}{c} = e^{ia} \quad (a \text{ عدد حقیقی})$$

$$\Rightarrow w = e^{ia} \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad (1)$$

$$\left| \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{d}{c} \right| \Rightarrow |z_1| = |z_2| \quad (1) \text{ از رابطه } \rightarrow z_2 = \bar{z}_1.$$

$$w = e^{ia} \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1} \rightarrow \text{تبدیلی که نیم صفحه } y \geq 0 \text{ را بروی } |w| \leq 1 \text{ می نگارد.}$$

مثال : تبدیل خطی را بیابید که نیم صفحه فوقانی صفحه z را داخل دایره واحد $|w| \leq 1$ در صفحه w می نگارد، به طوری که نقاط $z = i, \infty$ به ترتیب روی نقاط $w = 0, -1$ نگاشته می شود.

$$w = e^{ia} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

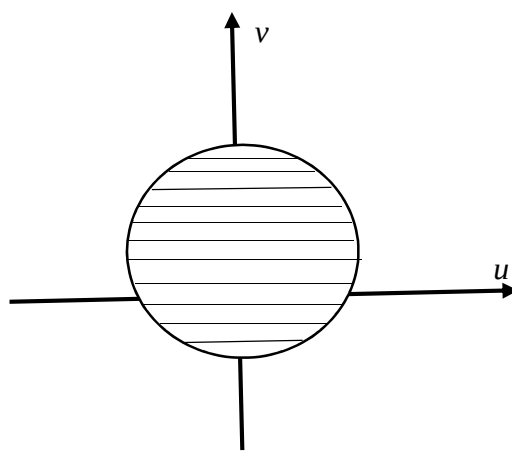
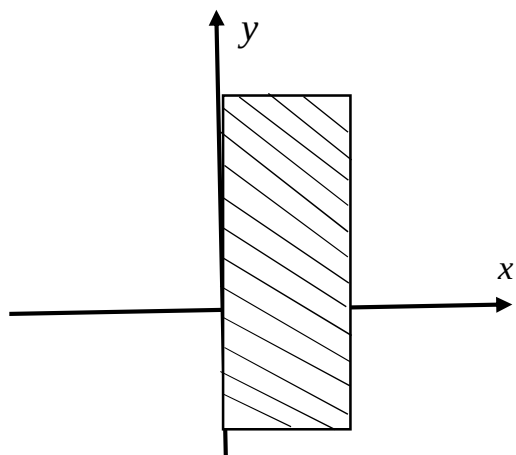
$$w = 0, \quad z = i \Rightarrow 0 = e^{ia} \frac{i - z_0}{i - \bar{z}_0}, \quad e^{ia} \neq 0 \Rightarrow \frac{i - z_0}{i - \bar{z}_0} = 0 \Rightarrow z_0 = i$$

$$w = -1, \quad z = \infty \Rightarrow -1 = e^{ia} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad z \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow e^{ia} = -1 \Rightarrow w = (-1) \frac{z - i}{z + i} = \frac{i - z}{i + z}$$

نکته : تبدیل خطی که نیم صفحه $X \geq 0$ را بروی $|w| \leq 1$ می نگارد به صورت زیر است :

$$w = e^{ia} \frac{z - z_0}{z + \bar{z}_0}$$



مثال : نشان دهید نمی توان تبدیل دو خطی یافت که نیم صفحه $X \geq 0$ را به روی $|w| \leq 1$ بنگارد. به گونه ای که نقطه $z = 0$ بروی $w = 0$ نگاشته شود.

$$z = 0, \quad w = 0 \Rightarrow 0 = e^{ia} \frac{0 - z_0}{0 + \bar{z}_0}$$

که امکان پذیر نیست.

مثال : تبدیل خطی را پیدا کنید که نقاط z_1, z_2 را به ترتیب به نقاط $w_1 = 0, w_2 = \infty$ می نگارد. سپس با استفاده از آن تابع تبدیلی که دایره $|z| \leq 1$ را بروی دایره $|w| \leq 1$ می نگارد به دست آورید.

$$\frac{(w-\cdot)(w_r-w_r)}{(w-w_r)(w_r-\cdot)} = \frac{(z-z_1)(z_r-z_r)}{(z-z_r)(z_r-z_1)}$$

$$\Rightarrow w = A \frac{z-z_1}{z-z_r}, \quad A = \frac{z_r-z_r}{z_r-z_1} w_r$$

فرض کنیم تابع $w=f(z)$ نقطه Z از دایره $|z| \leq 1$ را بروی مرکز دایره $|w| \leq 1$ بنگارد. در این صورت، نقطه $\frac{1}{\bar{z}}$

(قرینه نقطه Z نسبت به دایره $|z|=1$) به نقطه ∞ نگاشت می شود.

$$w = A \frac{z-z_1}{z-z_r} = A \frac{z-z_1}{z-\frac{1}{\bar{z}_1}} = B \frac{z-z_1}{z\bar{z}_1-1}, \quad B = Az_1$$

$$\stackrel{z=1}{\Rightarrow} |w|=1=|B| = \left| \frac{-z_1}{\bar{z}_1-1} \right| \Rightarrow |B|=1 \Rightarrow B=e^{ia} \quad (a \text{ حقیقی و دلخواه})$$

$$\Rightarrow w = e^{ia} \frac{z-z_1}{z\bar{z}_1-1}$$

کاربردهای نگاشت همدیس :

(۱) مسئله دریکله : در وضعیت های گوناگونی از مکانیک سیالات، نظریه میدان الکتریکی، هدایت گرما و

الاستیسیته ناشی می شود عبارت است از :

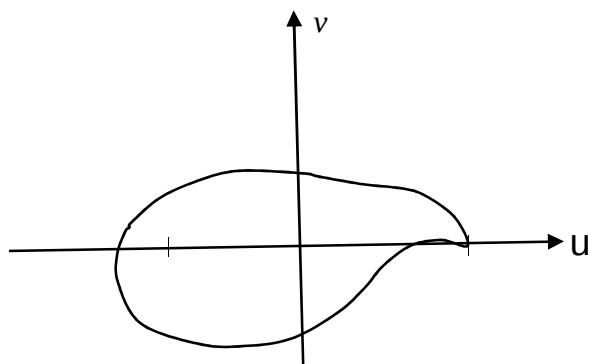
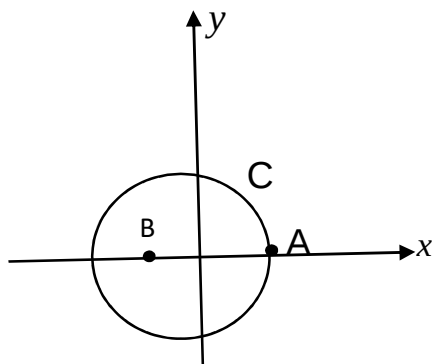
پیدا کردن تابعی نظیر $u(x,y)$ که در D همسازو روی مرز آن C مقادیر مشخصی داشته باشد، به علاوه در معادله لاپلاس صدق کند.

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad z \neq \cdot \quad (۲) \text{نگاشت ژوکوفسکی :}$$

ویژگی های این نگاشت :

(۱) به جز نقاط $z = \pm 1$ در بقیه نقاط، همدیس است.

(۲) دایره C را به بال های هواپیمایی با لبه انتهایی تیز و زاویه درونی صفر می نگارد. (بال های ژوکوفسکی).



شکل دیگری از نگاشت ژوکوفسکی :

$$w = z + \frac{a^2}{z}, \quad z \neq 0$$

این نگاشت غیر از $z = \pm a$ در بقیه نقاط همدیس است.

این نوع نگاشت در جریان سیال گذرا از استوانه مدور مورد استفاده قرار می گیرد.

فصل هفتم : آنالیز فوریه و کاربردهای آن :

بخش اول : تعاریف و مفاهیم اولیه

بخش دوم : سری فوریه

بخش سوم : سری فوریه نمایی

بخش چهارم : قضایای مربوط به سری فوریه و کاربرد سری فوریه

بخش پنجم : سری فوریه دوگانه

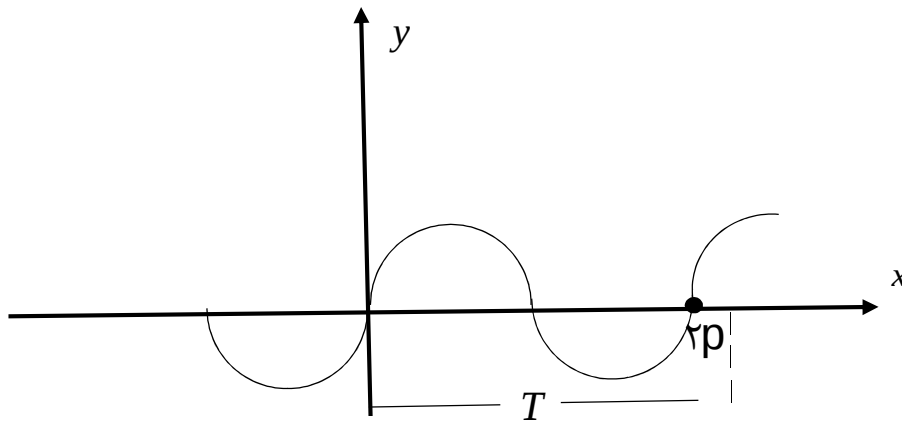
بخش اول : تعاریف و مفاهیم اولیه

شخصی بنام " ژوزف فوریه " در سال ۱۷۰۹ زمانی که در فرانسه، معادلات گرما را حل می کرد، به نتایجی رسید که ما اکنون با عنوان سری فوریه می شناسیم. در حل معادلات موج و گرما در ابعاد مختلف و در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، بسیار کاربرد می باشد.

تابع متناوب : تابعی مانند f :

$$\forall x \quad f(x+T) = f(x) \rightarrow T \text{ دوره تناوب}$$

مثال : توابع $\sin x$, $\cos x$ متناوب با دوره تناوب 2π هستند.



نکته :

(۱) اگر f یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد، آنگاه :

$$f(x+2T) = f[(x+T)+T] = f(x+T) = f(x)$$

$\vdots$

$$f(x+nT) = f(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

(۲) اگر $f_1, f_2, \dots, f_n$ توابعی متناوب با دوره تناوب T باشند، آنگاه :

$$f(x) = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n$$

نیز متناوب با دوره تناوب T خواهد بود.

تابع $f(x)$ را :

الف) زوج می گوییم هرگاه :

$$\forall x \in D_f, \quad f(-x) = f(x) \quad (\text{محور } y \text{ ها محور تقارن})$$

ب) فرد می گوییم هرگاه :

$$\forall x \in D_f, \quad f(-x) = -f(x) \quad (\text{مرکز مختصات مرکز تقارن})$$

و همینطور می دانیم :

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx \quad (1) \quad \text{اگر } f \text{ زوج باشد :}$$

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0 \quad (2) \quad \text{اگر } f \text{ فرد باشد :}$$

نکته : حاصلضرب تابع فرد در تابع زوج یک تابعی فرد می باشد.

مثال : اگر $f(x)$ یک تابع فرد باشد، $\cos \frac{np\pi x}{l}$ تابعی فرد است.

دنباله توابع $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ را نسبت به تابع وزن $W(x)$ در بازه $[a, b]$ متعامد گوییم هرگاه :

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x) W(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

مثال : توابع $X^0, X^1, X^2, \dots$ نسبت به تابع وزن X^2 در بازه $[-1, 1]$ متعامدند.

$$\int_{-1}^1 X^0 \cdot X^1 \cdot X^2 dx = \int_{-1}^1 X^3 dx = 0$$

تابع تکه ای پیوسته : تابع f را در فاصله $[a, b]$ تکه ای پیوسته نامیم هرگاه f در سراسر $[a, b]$ پیوسته نباشد، ولی

$$\exists \quad x_1 = a < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$$

(1) f در هر بازه (x_i, x_{i+1}) پیوسته باشد.

(2) حدود یک طرفه $f(x_i^+)$ ، $f(x_{i+1}^-)$ موجود باشد.

اگر $f'(x)$ هم مانند f در شرایط بالا صدق کند، f را تکه ای هموار گوییم.

بخش دوم : سری فوریه

فرض کنیم تابع f در فاصله $(-l, l)$ تعریف شده باشد و $f(x+2l) = f(x)$ سری فوریه تابع متناوب f را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

فرمول های اویلر : اگر در روابط بالا $l = p$ آنگاه :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

مثال : سری فوریه تابع متناوب $f(x) = 1+x$ را با دوره تناوب $2p$ در بازه $(-p, p)$ بنویسید.

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p (1+x) dx = \frac{(1+x)^2}{2p} \Big|_{-p}^p = 2$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p (1+x) \cos nx dx = \frac{(1+x) \sin nx}{np} \Big|_{-p}^p - \frac{1}{np} \int_{-p}^p \sin nx dx = \frac{1}{n^2 p} \cos nx \Big|_{-p}^p = 0$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{n} \int_{-p}^p (1+x) \sin nx dx \\
 &= -\frac{(1+x)(\cos nx)}{np} \Big|_{-p}^p + \frac{1}{np} \int_{-p}^p \cos nx dx \\
 &= -\frac{2 \cos np}{n} + \frac{\sin nx}{n^2 p} \Big|_{-p}^p = -\frac{2 \cos np}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$$

مثال : سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} -k & , -p < x < 0 \\ k & , 0 < x < p \end{cases}$ را در فاصله $(-p, p)$ با شرط

$$f(x+2p) = f(x) \text{ بنویسید.}$$

$$a = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx = \frac{1}{p} \left[\int_{-p}^0 (-k) dx + \int_0^p k dx \right] = \frac{1}{p} (-kp + kp) = 0$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{p} \left[\int_{-p}^0 -k \cos nx dx + \int_0^p k \cos nx dx \right] \\
 &= \frac{1}{p} \left(\frac{-k}{n} \sin nx \Big|_{-p}^0 + \frac{k}{n} \sin nx \Big|_0^p \right) = \frac{2k}{np} (\sin np) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{p} \left[\int_{-p}^0 -k \sin nx dx + \int_0^p k \sin nx dx \right] \\
 &= \frac{1}{p} \left(\frac{k}{n} \cos nx \Big|_{-p}^0 - \frac{k}{n} \cos nx \Big|_0^p \right) \\
 &= \frac{k}{pn} (\cos 0 - \cos(-np) - \cos np + \cos 0) = \frac{2k}{np} (1 - \cos np)
 \end{aligned}$$

$$\cos np = \begin{cases} -1 & , \text{ فرد } n \\ 1 & , \text{ زوج } n \end{cases} \Rightarrow 1 - \cos np = \begin{cases} 2 & , \text{ فرد } n \\ 0 & , \text{ زوج } n \end{cases}$$

$$\text{زوج } n \rightarrow b_n = 0$$

$$\text{فرد } n \rightarrow b_n = \frac{2k}{np}$$

$$f(x) = \frac{4k}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx \quad (n \text{ های فرد})$$

$$= \frac{4k}{p} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

حاصل جمع برخی از سری های نامتناهی را می توان با بررسی سری فوریه تابع $f(x)$ محاسبه نمود.

$$x = \frac{p}{2} \rightarrow f\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{4k}{p} \left(\sin \frac{p}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3p}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5p}{2} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{4k}{p} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

$$k = \frac{4k}{p} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{p}{4}$$

سری فوریه توابع زوج و فرد :

الف) سری فوریه کسینوسی : اگر تابع f روی $[-l, l]$ زوج باشد، آنگاه :

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{np x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{np x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{np x}{l} dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{np x}{l}$$

ب) سری فوریه سینوسی : اگر تابع f روی $[-l, l]$ فرد باشد، آنگاه :

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \cdot$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{np x}{l} dx = \cdot, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{np x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{np x}{l} dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{np x}{l}$$

حالتی از دوره تناوب $2p$: اگر $l = p$, آنگاه :

$$\text{زوج } f \rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{فرد } f \rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

مثال : سری فوریه تابع متناوب $f(x) = x^r$ را با دوره تناوب $2l$ در بازه $(-l, l)$ بنویسید.

$$\text{زوج } f \rightarrow \forall n \quad b_n = \cdot$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x^r dx = \frac{1}{l} \left(\frac{x^{r+1}}{r+1} \right) \Big|_{-l}^l = \frac{1}{r+1} l^r$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x^r \cos \frac{np x}{l} dx$$

$$= \frac{1}{l} \left(\frac{l}{np} \right) \left[x^r \sin \frac{np x}{l} + \frac{r x l}{np} \cos \frac{np x}{l} - \frac{r l^r}{n^r p^r} \sin \frac{np x}{l} \right] \Big|_{-l}^l = \frac{r l^r (-1)^n}{n^r p^r}$$

$$\text{سری فوریه} \rightarrow f(x) = \frac{l^r}{3} + \frac{4l^r}{p^r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^r} \cos \frac{np\pi x}{l}$$

اگر $l = p$ ، یک سری فوریه کسینوسی بدست می آید :

$$f(x) = \frac{p^r}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^r}$$

اگر $x = p$ قرار دهیم :

$$\Rightarrow f(x) = \frac{p^r}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{rn}}{n^r}$$

$$= \frac{p^r}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$$

$$\Rightarrow p^r = \frac{p^r}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \frac{p^r}{6}$$

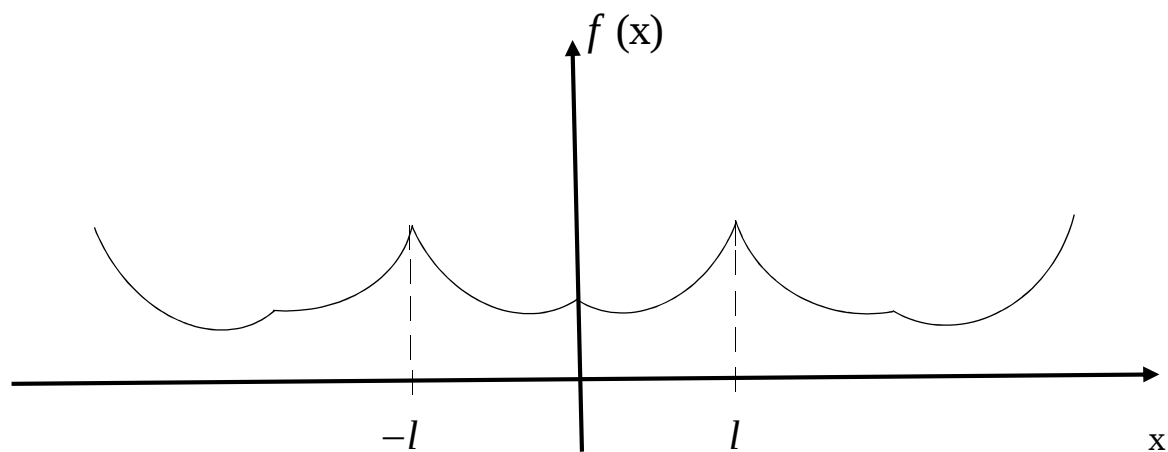
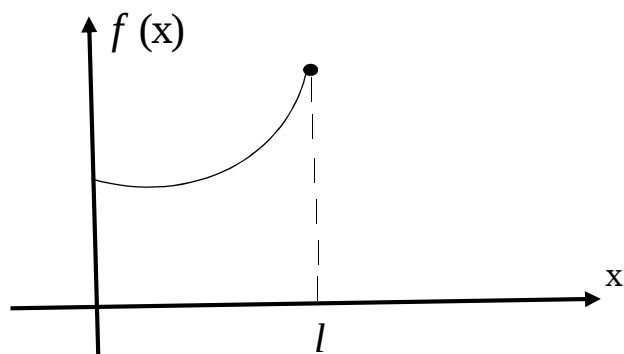
مثال : با استفاده از $f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n \cos np\pi x}{p^r n^r}$ مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^r}$ را بدست آورید.

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{p^r n^r}$$

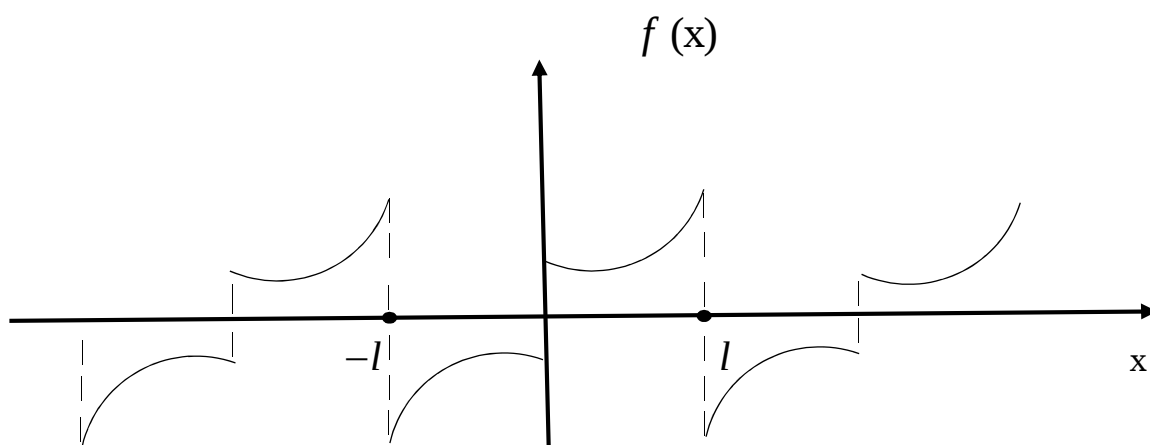
$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{p^r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^r} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^r} = -\frac{p^r}{12}$$

در این قسمت، فرض کنید تابعی در یک بازه کراندار داده شده است و آن تابع متناوب نیست، برای نوشتن سری فوریه آن تابع، یکبار تابع زوج و یکبار تابع فرد از آن درست می کنیم، بصورت کاملترین موضوع در صفحه بعد با عنوان بسط نیم دامنه، بررسی می شود :

ابتدا به شکل های زیر توجه کنید :



l را با گسترش زوج پیدا کرده ایم (سری فوریه کسینوسی بدست آمد)



سری فوریه f را با گسترش فرد بدست آوردیم (سینوسی)

سپس با توجه به شکل های فوق :

بسط نیم دامنه : گسترش زوج و فرد تابع $f(x); 0 \leq x \leq l$

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & , 0 \leq x \leq l \\ f(-x) & , -l \leq x \leq 0 \end{cases} , \quad f_1(x+2l) = f_1(x)$$

$f_1(x) \leftarrow$ یک گسترش زوج تابع f .

و همین طور به صورت مشابه :

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & , 0 \leq x \leq l \\ -f(-x) & , -l \leq x \leq 0 \end{cases} , \quad f_2(x+2l) = f_2(x)$$

$f_2(x) \leftarrow$ یک گسترش فرد تابع f است.

تابع $f_1(x)$ دارای سری فوریه کسینوسی و $f_2(x)$ دارای سری فوریه سینوسی خواهد بود، که در فاصله $0 \leq x \leq l$ با $f(x)$ برابرند.

سری های فوریه سینوسی و کسینوسی $\leftarrow$ بسط نیم دامنه تابع $f(x); 0 \leq x \leq l$ می باشند.

بسط نیم دامنه کسینوسی :

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx \quad , \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad , \quad n=1,2,\dots$$

بسط نیم دامنه سینوسی :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad , \quad n=1,2,\dots$$

مثال : سری فوریه کسینوسی تابع $f(x) = x$ را در فاصله $(0, p)$ بنویسید.

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx = \frac{2}{p} \int_0^p x dx = p$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos nx dx = \frac{2}{p} \int_0^p x \cos nx dx = \frac{2}{pn^2} (\cos np - 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{p}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{pn^2} (\cos np - 1) \cos nx$$

$$= \frac{p}{2} + \frac{2}{p} \left(\frac{-2}{1^2} \cos x - \frac{2}{3^2} \cos 3x - \frac{2}{5^2} \cos 5x + \dots \right)$$

$$= \frac{p}{2} - \frac{4}{p} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

مثال : سری فوریه سینوسی تابع $f(x) = x-1$ را برای فاصله $(0, 1)$ بنویسید.

$$\Rightarrow \forall n, a_n = 0 \quad \text{سری سینوسی}$$

$$b_n = 2 \int_0^1 x-1 \sin np x dx = 2 \left[\frac{-(x-1)}{np} \cos np x + \frac{1}{n^2 p^2} \sin np x \right]$$

$$= \frac{2}{np} \left[\frac{1}{np} \sin np - \cos \cdot \right] = \frac{-2}{np}$$

$$\Rightarrow x-1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{np} \sin np x = \frac{-2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin np x}{n}$$

نکته : برای محاسبه سری فوریه یک تابع، ابتدا زوج و فرد بودن آن را بررسی کرده و با توجه به آن، وضعیت ضرایب

a_n, b_n را مشخص می کنیم، سپس سری مورد نظر را می نویسیم. اما اگر سری فوریه سینوسی یا کسینوسی یک

تابع، مورد نظر باشد، بدون توجه به زوج یا فرد بودن تابع، به ترتیب ضرایب a_n, b_n را صفر قرارداده و سری را

بدست آوریم.

بخش سوم : سری فوریه نمایی

با استفاده از رابطه اویلر :

$$\cos q = \frac{e^{iq} + e^{-iq}}{2}, \quad \sin q = \frac{e^{iq} - e^{-iq}}{2}, \quad q = \frac{np\pi}{l}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{np\pi x}{l} + b_n \sin \frac{np\pi x}{l} \right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) \cdot e^{i \frac{np\pi x}{l}} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) \cdot e^{-i \frac{np\pi x}{l}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{np\pi x}{l}} \quad (1)$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

با ضرب طرفین رابطه (1) در $e^{-i \frac{np\pi x}{l}}$ و انتگرال جمله به جمله از $-l$ تا l خواهیم داشت :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{np\pi x}{l}}, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(x) e^{-i \frac{np\pi x}{l}} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

سری فوق را سری فوریه نمایی تابع f و c_n را ضرایب سری می نامیم.

مثال : سری فوریه نمایی تابع متناوب $f(x) = x$ را در فاصله $(-p, p)$ محاسبه کنید.

$$f \text{ تابعی فرد} \Rightarrow \forall n, a_n = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p x e^{-inx} dx = \frac{i \cos np}{n} = \frac{i(-1)^n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$n \neq 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n i e^{inx}}{n}$$

خواص سری فوريه :

(۱) انتقال زمانی : اگر ضرایب سری فوريه نمایی تابع متناوب f برابر C_n باشد،

آنگاه $f(x-t)$ نیز متناوب با دوره متناوب تابع f بوده و ضرایب آن برابر است با :

$$d_n = c_n e^{\frac{-n\pi t}{l}}$$

(۲) وارون سازی زمانی : اگر ضرایب سری فوريه نمایی تابع $f(x)$ برابر C_n باشد، ضرایب سری فوريه نمایی تابع $f(-x)$ برابر است با C_{-n} .

(۳) ضرایب دوسیگنال : اگر ضرایب سری فوريه نمایی توابع متناوب g, f با دوره تناوب T به ترتیب برابر

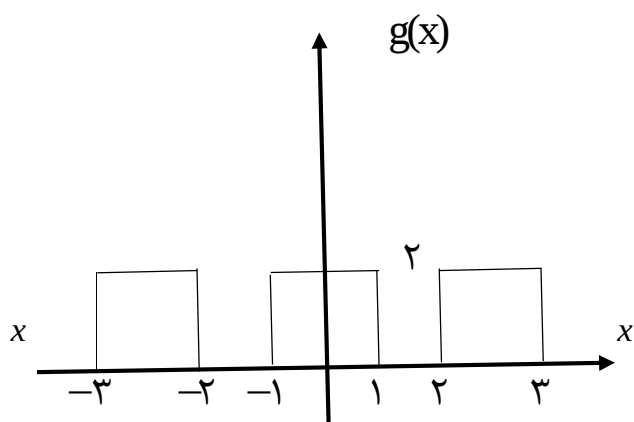
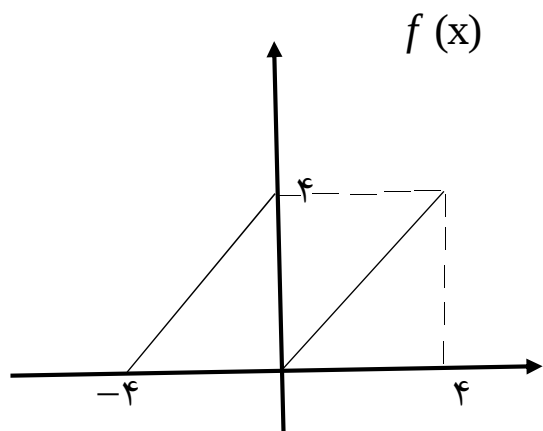
d_m, c_n باشد، آنگاه حاصلضرب دو تابع نیز متناوب با دوره تناوب T و با ضرایب سری $e_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n-m} d_m$ خواهد بود.

(۴) کانولوشن متناوب : کانولوشن دو تابع متناوب g, f با دوره تناوب T عبارت است از :

$$\frac{1}{T} \int_T f(x) g(x-t) dt$$

که متناوب با دوره تناوب T و با ضرایب فوريه $c_n d_m$ خواهد بود.

مثال : برای دو تابع متناوب داده شده زیر، ضرایب فوريه حاصلضرب و کانولوشن متناوب را بیابید.



$$f(x) = x, \quad 0 < x < \ell, \quad T = 2\ell = \ell$$

$$c_n = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} x e^{-i \frac{np x}{\ell}} dx = \frac{\ell i}{np}$$

$$g(x) = 1, \quad -1 < x < 1, \quad T = 2\ell = \ell$$

$$d_m = \frac{1}{\ell} \int_{-1}^1 1 e^{-i \frac{mp x}{\ell}} dx = \frac{2}{mp} \sin \frac{mp}{2}$$

$$e_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-m} d_m = \frac{\ell i}{(np)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m(n-m)} \sin \frac{mp}{2}$$

ضرایب سری فوریه کانولوشن متناوب :

$$e_m = c_n d_m = \left(\frac{\ell i}{np} \right) \left(\frac{2}{mp} \sin \frac{mp}{2} \right)$$

بخش چهارم: قضایای مربوط به سری فوریه

قضیه (قضیه دیریکله): فرض کنیم تابع f متناوب با دوره تناوب $2p$ در فاصله $(0, 2p)$ تکه ای هموار باشد، در اینصورت در هر نقطه پیوستگی، سری فوریه تابع f همگرا به f می باشد.

به علاوه در هر نقطه ناپیوستگی، سری فوریه به $\frac{f'(x^+) + f'(x^-)}{2}$ (میانگین حسابی حدود) همگراست.

مثال: سری فوریه تابع متناوب $f(x) = \begin{cases} x & , \quad -\frac{p}{2} < x < \frac{p}{2} \\ p-x & , \quad \frac{p}{2} < x < \frac{3p}{2} \end{cases}$ با دوره تناوب $2p$ را در

فاصله $(-p, p)$ به دست آورید و با استفاده از آن نشان دهید برای n های فرد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \frac{p^r}{\pi}$$

حل:

$$f(x) = \begin{cases} -p-x & , \quad -p < x < -\frac{p}{2} \\ x & , \quad -\frac{p}{2} < x < \frac{p}{2} \\ p-x & , \quad \frac{p}{2} < x < p \end{cases} \Rightarrow f \text{ تابعی فرد} \Rightarrow a_n = a_n = 0$$

نکته: اگر دوره تناوب تابع $2p$ باشد.

$$\int_{-p}^p f(x) dx = \int_{-\frac{p}{r}}^{\frac{rp}{r}} f(x) dx$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{r}{p} \int_{-\frac{p}{r}}^p f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{r}{p} \left[\int_{-\frac{p}{r}}^{\frac{p}{r}} x \sin nx dx + \int_{\frac{p}{r}}^p (p-x) \sin nx dx \right] = \frac{r}{pn^r} \sin \frac{np}{r}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \frac{r}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{np}{r} \cdot \sin nx}{n^r}$$

$$= \frac{r}{p} \left[\sin \frac{p}{r} \sin x + \frac{1}{r^r} \sin p \sin rx + \frac{1}{r^r} \sin \frac{rp}{r} \sin rx + \dots \right]$$

$$x = \frac{p}{r} \rightarrow f\left(\frac{p}{r}\right) = \frac{f\left(\frac{p}{r}^+\right) + f\left(\frac{p}{r}^-\right)}{r} = \frac{x + p - x}{r} = \frac{p}{r}$$

$$f\left(\frac{p}{r}\right) = \frac{p}{r} = \frac{r}{p} \left(\frac{1}{1^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{5^r} + \dots \right) = \frac{r}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^r}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \frac{p^r}{r} \quad (\text{برای } n \text{ های فرد})$$

مشتق گیری از سری فوریه :

قضیه : فرض کنیم تابع f در فاصله $[-p, p]$ پیوسته و تکه ای هموار باشد، به علاوه $f(p) = f(-p)$. در این

صورت، سری فوریه $f'(x)$ را می توان با مشتق گیری جمله به جمله از سری فوریه تابع f به دست آورد.

$$f(x) = \frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n a_n \sin nx + n b_n \cos nx) \quad \text{نقاط پیوستگی}$$

به علاوه در هر نقطه ناپیوستگی، داریم :

$$f'(x) = \frac{f'(x^+) + f'(x^-)}{2} \rightarrow \text{نقاط ناپیوستگی}$$

مثال : با استفاده از سری فوریه تابع $f(x) = x^2$ ، سری فوریه تابع $g(x) = x$ را در فاصله $[-p, p]$ به دست آورید.

$$x^2 = \frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(\frac{np\pi x}{l})}{n^2}$$

$$l = p \Rightarrow x^2 = \frac{p^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$$

$$2x = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-n \sin nx)}{n^2} \rightarrow \text{مشتق گیری از طرفین}$$

$$\Rightarrow x = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$$

انتگرال گیری از سری فوریه :

قضیه : فرض کنیم f تابعی متناوب با دوره تناوب $2p$ و در فاصله $[-p, p]$ تکه ای پیوسته باشد، در این صورت می توان از سری فوریه تابع f ، جمله به جمله انتگرال گرفت.

مثال : با استفاده از سری فوریه تابع $f(x) = x$ در فاصله $[-p, p]$ ، سری فوریه تابع $g(x) = x^2 - 1$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n} \\
 \Rightarrow \int_{-p}^x x \, dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_{-p}^x \sin nx \, dx \\
 \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{p^2}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(-\frac{1}{n}\right) (\cos nx - \cos np) \\
 \Rightarrow \frac{x^2}{2} &= \frac{p^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 \Rightarrow 2x^2 &= 2p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2} - \frac{p^2}{6} \\
 \Rightarrow 2x^2 &= 2p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2} - \frac{2p^2}{3} \\
 \Rightarrow g(x) = 2x^2 - 1 &= \frac{2p^2}{3} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}
 \end{aligned}$$

کاربردهای سری فوریه : در این قسمت کاربرد ساده سری فوریه را بررسی می کنیم، در فصل های آینده از سری فوریه برای حل معادلات موج و گرما و همچنین حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده می کنیم :

حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم با استفاده از سری فوریه را در مثال زیر ارائه می دهیم :

مثال : با استفاده از سری فوریه، جواب خصوصی معادله $y'' - 2y = f(x)$ را به دست آورید که در آن، $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $2p$ و برابر است با $f(x) = \sin nx$.

حل :

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \Rightarrow \text{تابع فرد}$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p (\sin nx)(\sin nx) \, dx = \frac{2}{np} (1 - \cos nx)$$

$$\Rightarrow y'' - 2y = \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos np) \sin nx}{n}$$

حال فرض کنیم :

$$y_p = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

با محاسبه y'' و جایگذاری در معادله خواهیم داشت :

$$-A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 2)(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

$$= \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos np) \sin nx}{n}$$

$$\Rightarrow A_0 = 0, \quad A_n = 0, \quad B_n = \frac{2(\cos np - 1)}{pn(n^2 + 2)}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos np - 1) \sin nx}{n(n^2 + 2)}$$

بخش پنجم : سری فوريه دوگانه

تا این قسمت هرآنچه گفته شد برای معادلات موج و گرما در حالت یک بعدی کاربرد دارد، اما برای حالت های دو بعدی باید از سری فوريه دو گانه استفاده کرد، البته این قسمت در سرفصل های آموزشی ریاضی مهندسی نیست و فقط برای آشنایی و بصورت مختصر در این بخش از کتاب به آن می پردازیم :

فرض کنیم تابع $f(x, y)$ متناوب با دوره تناوب $2p$ باشد.

$$f(x + 2p, y) = f(x, y + 2p) = f(x, y)$$

بسط فوريه با ثابت نگه داشتن y :

$$f(x, y) = \frac{a_0(y)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m(y) \cos mx + b_m(y) \sin mx)$$

$$a_m(y) = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x, y) \cos mx \, dx$$

$$b_m(y) = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x, y) \sin mx \, dx$$

سری فوريه مربوط به هریک ضرایب :

$$a_m(y) = \frac{a_{mn}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos ny + b_{mn} \sin ny)$$

$$b_m(y) = \frac{A_{mn}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos ny + B_{mn} \sin ny)$$

$$a_{mn} = \frac{1}{p^2} \int_{-p}^p \int_{-p}^p f(x, y) \cos mx \cos ny \, dx dy$$

$$b_{mn} = \frac{1}{p^2} \int_{-p}^p \int_{-p}^p f(x, y) \cos mx \sin ny \, dx dy$$

$$\begin{cases} A_{mn} = \frac{1}{p^2} \int_{-p}^p \int_{-p}^p f(x, y) \sin mx \cos ny \, dx dy \\ B_{mn} = \frac{1}{p^2} \int_{-p}^p \int_{-p}^p f(x, y) \sin mx \sin ny \, dx dy \end{cases}$$

اگر دقت کرده باشید محاسبات خیلی طولانی هستند اما در شرایط خاص محاسبات کمتر است یکی از شرایط (سری فوریه سینوسی و کسینوسی).

تمام ضرایب به غیر از a_{mn} صفر میشود $\Rightarrow f(-x, y) = f(x, -y) = f(x, y)$ اگر:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos mx \cos ny$$

$$a_{mn} = \frac{4}{p^2} \int_0^p \int_0^p f(x, y) \cos mx \cos ny \, dx dy$$

سری فوق را سری فوریه کسینوسی دوگانه تابع $f(x, y)$ می نامیم.

یکی دیگر از آن شرایط بصورت زیر است:

تمام ضرایب به غیر از B_{mn} صفر می شود $\Rightarrow f(-x, y) = f(x, -y) = -f(x, y)$ اگر:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin mx \sin ny$$

$$B_{mn} = \frac{4}{p^2} \int_0^p \int_0^p f(x, y) \sin mx \sin ny \, dx dy$$

سری فوق را سری فوریه سینوسی دوگانه تابع می نامیم.

مثال: سری فوریه دوگانه تابع $f(x, y) = \sin x \sin y$ را برای $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ بنویسید.

سری فوریه سینوسی $\Rightarrow f(-x, y) = f(x, -y) = -f(x, y)$

$$B_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \sin mp x \sin np y \, dx dy$$

$$= 4 \int_0^1 \int_0^1 \sin x \sin y \sin mp x \sin np y \, dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 [\cos(m-n)x - \cos(m+p)x - \cos(n+p)y] \, dx dy$$

$$= \left[\frac{\sin(m-n)}{m-n} - \frac{\sin(m+p)}{m+p} \right] \left[\frac{\sin(n-p)}{n-p} - \frac{\sin(n+p)}{n+p} \right]$$

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin mp x \sin np y$$

فصل هشتم : انتگرال فوریه

بخش اول : انتگرال فوریه و خواص آن

بخش دوم : تبدیل فوریه و خواص آن

بخش سوم : تبدیل فوریه مشتق

بخش چهارم : کاربرد تبدیل فوریه

بخش اول : انتگرال فوریه و خواص آن

در سری فوریه بازه بین l تا $-l$ بود، حال اگر $L \rightarrow \infty$ میل کند به آن انتگرال فوریه می گوییم و واضح است f دیگر متناوب نیست.

$$1) L \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ انتگرال فوریه

$$2) f \text{ متناوب نباشد}$$

قضیه (انتگرال فوریه) : فرض کنیم تابع $f(x)$ در شرایط زیر صدق کند :

(۱) در هر بازه $-l < x < l$ تکه ای هموار باشد.

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \text{ همگرا باشد، یعنی } f \text{ در } (-\infty, \infty) \text{ مطلقا انتگرال پذیر باشد.}$$

در این صورت در هر نقطه پیوستگی، داریم :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(a) \cos ax + B(a) \sin ax] da \quad (\text{انتگرال فوریه تا } f)$$

$$A(a) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos at \, dt$$

$$B(a) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin at \, dt$$

$$f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \quad \text{و در نقاط ناپیوستگی :}$$

تذکر : شرایط ذکر شده در قضیه، شرایط کافی هستند نه لازم.

به عنوان مثال، تابع $\frac{\sin x}{x}$ شرایط قضیه را ندارد، ولی انتگرال فوریه دارد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{مثال : انتگرال فوریه تابع } f(x) = \begin{cases} p & , |x| \leq p \\ 0 & , |x| > p \end{cases} \text{ را بدست آورده و با استفاده از آن، مقدار}$$

را محاسبه کنید.

$$A(a) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos a t dt = \int_{-p}^p \cos a t dt = \frac{2}{a} \sin a p$$

$$B(a) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin a t dt = \int_{-p}^p \sin a t dt = 0$$

$$\text{انتگرال فوریه} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} A(a) \cos a x da = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a p}{a} \cos a x da$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a p}{a} \cos a x da$$

$$x = 0, \quad f(0) = p \Rightarrow p = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a p}{a} da$$

$$a p = x \Rightarrow a = \frac{x}{p} \Rightarrow da = \frac{dx}{p}$$

$$\Rightarrow p = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{\frac{x}{p}} \left(\frac{dx}{p} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = p$$

مثال : انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ را نوشته و با استفاده از آن حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx + x \sin kx}{x^2 + 1} dx$$

$$A(a) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \cos a t dt = \frac{1}{p(a^2 + 1)}$$

$$B(a) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \sin a t dt = \frac{a}{p(a^2 + 1)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos a x + a \sin a x}{a^2 + 1} da$$

$$\forall x \in (0, \infty), \quad f(x) = e^{-x}$$

بنابراین با تغییر متغیر a به x و x به k داریم :

$$f(k) = e^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx + x \sin kx}{x^2 + 1} dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx + x \sin kx}{x^2 + 1} dx = pe^{-k}$$

انتگرال فوریه توابع زوج و فرد :

اگر f تابعی زوج باشد آنگاه :

$$A(a) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos at dt = \frac{2}{p} \int_0^{\infty} f(t) \cos at dt$$

$$B(a) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin at dt = 0$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(a) \cos ax da = \frac{2}{p} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) \cos a t \cos ax da dt$$

انتگرال فوق را انتگرال فوریه کسینوسی تابع f می نامیم.

به همین ترتیب اگر f تابعی فرد باشد آنگاه :

$$A(a) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos a t dt = 0$$

$$B(a) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin a t dt = \frac{2}{p} \int_0^{\infty} f(t) \sin a t dt$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B(a) \sin ax da = \frac{2}{p} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) \sin a t \sin ax da dt$$

انتگرال فوق را انتگرال فوریه سینوسی تابع f می نامیم.

مثال : انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} -1 & , -1 < x < 0 \\ 1 & , 0 < x < 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$ را محاسبه نموده و با استفاده از آن، مقدار انتگرال

زیرا به دست آورید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

$$f \Rightarrow A(a) = 0 \quad \text{تابعی فرد}$$

$$B(a) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin at \, dt = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \sin at \, dt = \frac{1(1 - \cos a)}{ap}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B(a) \sin ax \, da = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos a}{a} \sin ax \, da$$

$$= \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{a} \cdot \sin ax \, da$$

$$f(x) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \sin ax}{a} \, da$$

$$x = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a}{2}\right)}{a} \, da$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{a} \, da = \frac{p}{2}$$

با تغییر متغیر :

$$\frac{a}{2} = x \Rightarrow da = 2dx \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{2x} (2dx)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx = \frac{p}{2}$$

مثال : انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \leq 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases}$ را بدست آورید.

$$f \Rightarrow B(a) = 0 \quad \text{تابعی زوج}$$

$$A(a) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos at \, dt = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \cos at \, dt = \frac{2 \sin a}{ap}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(a) \cos ax \, da = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a}{a} \cos ax \, da$$

انتگرال فوریه نمایی : انتگرال فوریه نمایی تابع f را بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ia(x-t)} dt da$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(a) e^{iax} da$$

$$c(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iat} dt$$

مثال : انتگرال فوریه نمایی تابع $f(x) = e^{-|x|}$ را بدست آورید.

$$c(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iat} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^t \cdot e^{-iat} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-iat} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(1-ia)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(1+ia)t} dt \right] = -\frac{1}{p(a^2 + 1)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(a) e^{iax} da = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{a^2 + 1} da$$

$$x = 1, \quad a = z \quad \Rightarrow \quad f(1) = \frac{1}{e} = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = \frac{p}{e}$$

بخش دوم : تبدیل فوریه و خواص آن

در درس معادلات دیفرانسیل بخش عمده ای به تبدیل لاپلاس تعلق داشت. اگر به یاد داشته باشید هنر تبدیل لاپلاس تبدیل معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری بود، و برای حل معادلات دیفرانسیل بسیار مفید بود، در اینجا تبدیل فوریه نیز برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بکار می رود و در حقیقت معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می کند و روش حل را کوتاهتر می کند. پس بصورت زیر شروع می کنیم به معرفی تبدیل فوریه، انتگرال زیر :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ia(x-t)} dt dx$$

که انتگرال فوریه نمایی بود و در صفحه قبل بررسی کردیم، آنرا بصورت زیر بازسازی می کنیم (در صفحات بعد علت این نوع بازسازی شرح داده می شود).

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iat} dt \right] e^{iax} dx$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iat} dt \right] \text{ به این قسمت می گوئیم تبدیل فوریه تابع } f(t) \text{ و آنرا با } F(a) \text{ نشان}$$

می دهیم. به این ترتیب :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(a) e^{iax} da \quad (f = \text{تبدیل فوریه معکوس } F(a))$$

$F(a)$ را تبدیل فوریه تابع f نامیده و با نماد $F(f)$ نشان می دهیم :

$$F(a) = F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iat} dt$$

بنابراین با داشتن $F(a)$ ، تابع f و با داشتن تابع f ، $F(a)$ قابل محاسبه است.

توجه : انتخاب ثابت $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ اختیاری است و با هر ثابت دیگری قابل تعویض است به شرطی که حاصل ضرب این ثابت

و ثابت مربوط به تابع f برابر $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ شود.

نکته :

(۱) تبدیل فوریه تابع f زمانی وجود دارد که انتگرال رابطه زیر، وجود داشته باشد :

$$F(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iat} dt$$

به عنوان مثال، تابع ثابت $f(x) = k$ ، و تابع $f(x) = e^x$ تبدیل فوریه ندارند.

(۲) شرایط کافی برای وجود تبدیل فوریه، همان شرایط ذکر شده در قضیه انتگرال فوریه است.

مثال : تبدیل فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ را بدست آورید.

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iat} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t e^{-iat} dt = -\frac{1}{a^2 \sqrt{2\pi}}$$

مثال : تبدیل فوریه تابع $f(t) = h(t) e^{-kt}$ را که در آن $k > 0$ ، $h(t) = \begin{cases} 1 & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$ است، را بیابید.

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-kt} e^{-iax} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(k+ia)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{k+ia} \right)$$

جدول تبدیلات فوریه :

$f(x)$	$F(a) = F(f)$
$\frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{p}{2}} \frac{e^{-a a }}{a}$
$\begin{cases} e^{-ax} & , x > 0 \\ 0 & \end{cases} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi} (a+ia)}$
$\begin{cases} e^{ax} & b < x < c \\ 0 & \end{cases}$	$\frac{e^{(a-ia)b} - e^{(a-ia)c}}{\sqrt{2\pi} (a-ia)}$
$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{-a^2}{4a}}$

تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی :

تبدیل فوریه کسینوسی $(F_c(a))$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos a t dt \right] \cos a x da$$

$$\text{که } F_c(a) = \left[\sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos a t dt \right] \text{ را تبدیل فوریه کسینوسی تابع } f \text{ می نامند.}$$

$$\Rightarrow F_c(a) = F(f) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos a t dt$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} F_c(a) \cos a x da \rightarrow F_c \text{ تبدیل فوریه معکوس کسینوسی}$$

تبدیل فوریه سینوسی $(F_s(a))$:

بطور مشابه :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin a t dt \right] \sin a x da$$

$$\text{که } F_s(a) = \left[\sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin a t dt \right] \text{ تبدیل فوریه سینوسی تابع } f \text{ می نامند.}$$

$$\Rightarrow F_s(a) = F_s(f) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin a t dt$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} F_s(a) \sin a x da \rightarrow F_s \text{ تبدیل فوریه معکوس سینوسی}$$

$$\text{مثال : تبدیل فوریه کسینوسی تابع } f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \text{ را به دست آورده و با استفاده از آن}$$

حاصل انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx$$

حل :

$$\begin{aligned} F_c(a) &= \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^{\infty} f(t) \cos at dt = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^1 (1-t^2) \cos at dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{-a \cos a + \sin a}{a^2} \right) = -\sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{a \cos a - \sin a}{a^2} \right) \end{aligned}$$

از طرفی، بنابه تعریف تبدیل فوریه معکوس داریم :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^{\infty} F_c(a) \cos ax da \\ &= \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^1 \left(-\sqrt{\frac{2}{p}} \right) \left(\frac{a \cos a - \sin a}{a^2} \right) \cdot \cos ax da \\ &= -\frac{2}{p} \int_0^{\infty} \left(\frac{a \cos a - \sin a}{a^2} \right) \cos ax da \\ x = \frac{1}{2} &\rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ \Rightarrow \frac{3}{4} &= -\frac{2}{p} \int_0^{\infty} \frac{a \cos a - \sin a}{a^2} \cos \frac{a}{2} da \\ \underline{a=x} \quad \int_0^{\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \cdot \cos \frac{x}{2} dx &= -\frac{3p}{16} \end{aligned}$$

مثال : معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin ax dx = \begin{cases} a & , 0 \leq a < 1 \\ 1 & , 1 \leq a < 2 \\ 0 & , a \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax \, da = F_s(a)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} F_s(a) \sin ax \, da$$

$$= \sqrt{\frac{2}{p}} \left[\int_{-\infty}^0 a \sin ax \, da + \int_0^{\infty} \sin ax \, da \right] = \frac{\sqrt{2}(\sin x - x \cos x)}{\sqrt{p} x^2}$$

جدول تبدیلات سینوسی فوریه :

	$f(x)$	$F_s(a) = F_s(f)$
۱)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}$
۲)	e^{-x}	$\sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{a}{1+a^2} \right)$
۳)	$\frac{e^{-ax}}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{p}} \arctan \frac{a}{a}$
۴)	$x e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{a}{(2a)^{\frac{p}{2}}} \cdot e^{-\frac{a^2}{2a}}$
۵)	$x e^{-\frac{x^2}{2}}$	$a e^{-\frac{a^2}{2}}$

جدول تبدیلات کسینوسی فوریه :

$f(x)$	$F_c(a) = F_c(f)$
$e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{a}{a^2 + p^2} \right)$
$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{p^2}{4a}}$
$e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (a > 0)$	$e^{-\frac{p^2}{2}}$
$\cos ax^2 \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{a^2}{4a} - \frac{p^2}{4}\right)$
$\sin ax^2 \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{a^2}{4a} + \frac{p^2}{4}\right)$

خواص تبدیل فوریه :

۱) $F(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 F(f_1) + c_2 F(f_2) \rightarrow$ خاصیت خطی بودن

۲) $F(f(t - c)) = e^{-iac} F(f) \rightarrow$ خاصیت انتقال

۳) $F(f(ct)) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{a}{c}\right) \rightarrow$ خاصیت مقیاس (عدد حقیقی و مخالف صفر)

بخش سوم : تبدیل فوریه مشتق

یعنی اگر شما تبدیل فوریه تابع f را داشتید، برای محاسبه تبدیل فوریه f' یا f'' نیازی به محاسبه نیست، رابطه ای وجود دارد که تبدیلات فوریه مشتقات f را براساس تبدیل فوریه f ، به ما می دهد.

قضیه : اگر تابع f در $(-\infty, \infty)$ پیوسته و تکه ای هموار باشد، به علاوه، $f \rightarrow 0$ وقتی $|x| \rightarrow \infty$ ، همچنین f' ، f مطلقا انتگرال پذیر باشند، آنگاه :

$$F(f') = ia F(f)$$

$$F(f'') = (ia)^2 F(f)$$

⋮

$$F(f^{(n)}) = (ia)^n F(f)$$

مثال : تبدیل فوریه $f(x) = xe^{-x^2}$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} F(xe^{-x^2}) &= F\left(-\frac{1}{2}(e^{-x^2})'\right) = -\frac{1}{2} F((e^{-x^2})') \\ &= -\frac{1}{2}(ia)F(e^{-x^2}) = -\frac{1}{2}(ia)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\frac{a^2}{2}} = \frac{-ia}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{a^2}{2}} \end{aligned}$$

تبدیل فوریه کانولوشن دو تابع :

یادآوری : کانولوشن (تلفیق، پیچش) دو تابع f ، g به صورت زیر تعریف می شود : (نماد کانولوشن * است).

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt$$

قضیه کانولوشن : فرض کنیم $F(a)$ ، $G(a)$ به ترتیب تبدیل فوریه f ، g باشند. در این صورت، تبدیل فوریه کانولوشن f ، g عبارت است از :

$$F(f * g) = F(a)G(a)$$

کاربرد قضیه کانولوشن :

(۱) محاسبه تبدیل فوریه توابع f ، g با استفاده از فرمول ذکر شده.

(۲) حل معادلات انتگرالی به شکل زیر:

$$f(x) = h(x) + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt$$

مثال : معادله انتگرالی $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ را حل کنید.

$$F(e^{-\frac{1}{2}x^2}) = \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{قضیه کانولوشن} \rightarrow F\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t) dt\right)$$

$$= F(f * f) = F(a) \cdot F(a) = F^2(a)$$

$$\Rightarrow F^2(a) = \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow F(a) = \frac{e^{-\frac{a^2}{4}}}{\sqrt{2}}$$

$$f(x) = F^{-1}(F) = F^{-1}\left(\frac{e^{-\frac{a^2}{4}}}{\sqrt{2}}\right) = e^{-x^2}$$

اتحاد پارسوال : اگر $F(a)$ ، $G(a)$ به ترتیب تبدیل فوریه توابع f ، g باشند، آنگاه :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a)\overline{G(a)} da$$

حالت های خاص اتحاد پارسوال :

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F^2(a)| da$$

نکته : در اتحاد پارسوال، برای بازه $(-\infty, \infty)$ ، از تبدیل های سینوسی و کسینوسی (به دلخواه) استفاده

می شود، یعنی :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f \cdot g) dx = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} F_s G_s da$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f \cdot g) dx = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} F_c G_c da$$

مثال : نشان دهید $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} F_c^2 da$$

$$\text{از جدول تبدیلات فوریه} \rightarrow F_c(a) = \sqrt{\frac{p}{2}} e^{-a} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{p}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a} da = \frac{p}{4}$$

قضیه : فرض کنیم وقتی $x \rightarrow \infty$ ، توابع f و f' به سمت صفر میل کنند، در این صورت :

$$F_c(f''(x)) = -a^2 F_c(a) - \sqrt{\frac{2}{p}} f'(\cdot)$$

برهان :

$$\begin{aligned} F_c(f'') &= \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} f''(t) \cos at dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{p}} \left[f'(t) \cos at \Big|_{-\infty}^{\infty} + a \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \sin at dt \right] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{p}} \left[f'(\cdot) - a f(t) \sin t \Big|_{-\infty}^{\infty} + a^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos at dt \right] = \sqrt{\frac{2}{p}} f'(\cdot) - a^2 F_c(a) \end{aligned}$$

قضیه : با شرایط قضیه قبل داریم :

$$F_s(f'') = \sqrt{\frac{2}{p}} a f(\cdot) - a^2 F_s(a)$$

مثال : تبدیل فوریه سینوسی مشتق تابع $f(f')$ را به دست آورید.

$$F_s(f') = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \sin at \, dt$$

$$\begin{cases} \sin at = u & \Rightarrow a \cos at \, dt = du \\ f'(t) \, dt = dv & \Rightarrow f(t) = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_s(f') = \sqrt{\frac{2}{p}} \left[\sin at f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - a \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos at \, dt \right]$$

$$= 0 - (a) \sqrt{\frac{2}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos at \, dt = -a F_c(a)$$

توجه داشته باشید تبدیل فوریه سینوسی مشتق برابر است با ضربی از تبدیل فوریه کسینوسی.

بخش چهارم : کاربردهای تبدیل فوریه

قبل از مطالعه این بخش بهتر است ابتدا مطالب مربوط به فصل نهم را مطالعه کنید و سپس به بررسی این بخش بپردازید.

حل مسئله بامقدارمرزی با استفاده از تبدیل فوریه : در سه مثال این مطلب را ارائه می کنیم :

مثال : معادله زیر را با شرایط داده شده حل کنید.

$$u_t = u_{xx}, |x| < \infty, t \geq 0$$

$$u \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty, u(x, 0) = e^{-x^2}$$

حل :

$$u(x, t) \text{ تبدیل فوریه } = U(a, t) \Rightarrow U_t = -a^2 U$$

$$U_t = -a^2 U \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -a^2 U \Rightarrow \frac{dU}{U} = -a^2 dt$$

$$\Rightarrow \ln U + \ln c = -a^2 t \Rightarrow U \cdot c = e^{-a^2 t}$$

$$\Rightarrow U \frac{1}{c} e^{-a^2 t} = c e^{-a^2 t} F(e^{-k^2 x^2}) = \frac{e^{-\frac{a^2}{k^2} x^2}}{k \sqrt{2\pi}}$$

از جدول تبدیلات فوریه

$$\rightarrow \text{اعمال شرط اولیه} \quad U(a, \cdot) = F(u(x, \cdot)) = F(e^{-x^2}) = \frac{e^{-\frac{a^2}{k^2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\begin{cases} U(a, t) = ce^{-a^2 t} \\ U(a, \cdot) = \frac{e^{-\frac{a^2}{4}}}{\sqrt{4}} \end{cases} \Rightarrow c = \frac{e^{-\frac{a^2}{4}}}{\sqrt{4}}$$

$$\Rightarrow U(a, t) = \frac{1}{\sqrt{4}} e^{-\frac{a^2}{4}} e^{-a^2 t} = \frac{1}{\sqrt{4}} e^{-a^2 (\frac{1+4t}{4})}$$

$$F(e^{-k^2 x^2}) = \frac{e^{-\frac{a^2}{4k^2}}}{k\sqrt{4}}, \quad U(a, t) = \frac{e^{-a^2 (\frac{1+4t}{4})}}{\sqrt{4}}$$

از مقایسه دو رابطه بالا خواهیم داشت $k = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}$. حال از طرفین رابطه دوم تبدیل فوریه معکوس میگیریم:

$$u(x, t) = (\sqrt{4t+1}) e^{-\frac{1}{4t+1} x^2}$$

دراین مثال هنرتبدیل فوریه این بود که از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، یک معادله دیفرانسیل معمولی ساخت، که با حل معادله دیفرانسیل معمولی، U را بدست آوردیم. از شرایط اولیه توانستیم مقدار ثابت را بدست آورده و زمانی که U بصورت جواب خصوصی حاصل شد تبدیل فوریه معکوس گرفتیم تا $u(x, t)$ بدست آمد. مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$U_{xx} + U_{yy} = 0, \quad y > 0$$

$$u \rightarrow 0 \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty$$

$$u(x, 0) = 1, \quad |x| \leq 1$$

$$u(x, 0) = 0, \quad |x| > 1$$

حل: مانند مثال قبل U را تبدیل فوریه u بر حسب x می گیریم:

$$U_{yy} - a^2 U = 0$$

(یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم)

$$m^2 - a^2 = 0 \Rightarrow m = \pm a \rightarrow \text{معادله مشخصه}$$

$$\Rightarrow U(a, y) = c_1 e^{ay} + c_2 e^{-ay}$$

$$U = ce^{-|a|y} \quad (1)$$

$$\rightarrow \text{شرط اولیه} \quad u(x, 0) = 1, \quad |x| \leq 1$$

$$\rightarrow \text{تبدیل فوریه} \quad U(a, \cdot) = F(\cdot) = \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{\sin a}{a}$$

$$U(a, \cdot) = ce^{-|a|(\cdot)} = c \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{\sin a}{a}$$

$$\rightarrow^* U = \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{\sin a}{a} e^{-|a|y}$$

$$F(\cdot) = \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{\sin a}{a} \Rightarrow f(t) = 1$$

حال باید تبدیل معکوس فوریه * را بنویسیم تا u بدست آید، تبدیل معکوس فوریه * بسیار سخت است، اما می توان از کانولوشن استفاده کرد، سمت راست رابطه را بصورت ضرب دو تبدیل فوریه می نویسیم سپس اگر تبدیل معکوس فوریه را برای آنها بنویسیم برابر میشود با انتگرال کانولوشن تبدیل فوریه معکوس آن دو. پس :

$$U = \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{\sin a}{a} e^{-|a|y}$$

$$F(\cdot) = \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{\sin a}{a} \Rightarrow f(t) = 1$$

$$F\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = \sqrt{\frac{p}{2}} \frac{e^{-ay}}{y} \Rightarrow g(t) = \sqrt{\frac{2}{p}} y \left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

$$\rightarrow \text{قضیه کانولوشن} \quad u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{p}} y \int_{-1}^1 \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2}$$

دراین انتگرال y مانند عدد ثابت است.

$$= \sqrt{\frac{2}{p}} y \left(\frac{1}{y} \arctan \frac{x-t}{y} \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \sqrt{\frac{2}{p}} \left(\arctan \frac{x-1}{y} - \arctan \frac{x+1}{y} \right)$$

مثال : مسئله پخش نامتناهی زیر را حل کنید.

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty$$

$$u(\cdot, t) = c \quad (\text{ثابت}), \quad \cdot < t < \infty$$

$$u(x, \cdot) = \cdot, \quad \cdot < x < \infty$$

چون نیم دامنه داریم در نتیجه از تبدیل سینوسی یا کسینوسی استفاده می کنیم. ما از تبدیل سینوسی استفاده می کنیم: (بر حسب x).

$$F_s(u) = U(t) \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -a {}^r U + \sqrt{\frac{r}{p}} ac$$

$$u(x, \cdot) \Rightarrow U(a, \cdot) = \cdot$$

بنابراین باید معادله دیفرانسیل معمولی زیر را حل کنیم (چون خطی است احتیاج به عامل انتگرال ساز داریم).

$$\frac{dU}{dt} + a {}^r U = \sqrt{\frac{r}{p}} ac, \quad U(a, \cdot) = \cdot$$

$$m(t) = e^{\int a {}^r dt} = e^{a {}^r t}$$

$$U = e^{-a {}^r t} \left[\int \sqrt{\frac{r}{p}} ac e^{a {}^r t} dt + a. \right] = \sqrt{\frac{r}{p}} \times \frac{c}{a} (1 + a. e^{-a {}^r t})$$

جواب عمومی به دست آمد، حال با استفاده از شرط اولیه $U(a, \cdot)$ جواب خصوصی رامی یابیم:

$$U \sqrt{\frac{r}{p}} \left(\frac{c}{a} \right) (1 + a. e^{-a {}^r t})$$

$$U(a, \cdot) = \cdot \Rightarrow \sqrt{\frac{r}{p}} \left(\frac{c}{a} \right) (1 + a.) = \cdot \Rightarrow a. = -1$$

$$U(a, t) = \sqrt{\frac{r}{p}} c \left(\frac{1 - e^{-a {}^r t}}{a} \right)$$

$$U(x, t) = F^{-1}(U(a, t))$$

فصل نهم : معادلات دیفراسیل با مشتقات جزئی

بخش اول : مفاهیم اولیه و حل برخی از معادلات دیفراسیل جزئی ساده

بخش دوم : طبقه بندی معادلات خطی مرتبه دو و شکل متعارف آنها

بخش سوم : حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به روش جداسازی متغیرها

بخش اول : مفاهیم اولیه و حل برخی از معادلات دیفراسیل جزئی ساده

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی : هر معادله شامل u به عنوان تابع مجهول و متغیرهای $x, y, z, \dots$ به عنوان متغیرهای مستقل و مشتقات جزئی u نسبت به متغیرهای $x, y, z, \dots$ سپس بطور کلی شکل یک معادله دیفراسیل با مشتقات جزئی بصورت زیر است :

$$f(x, y, z, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0$$

مثال : معادله موج یک بعدی بصورت $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ یک معادله دیفراسیل با مشتقات جزئی است همچنین معادلات زیر از این نوع می باشند :

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad \text{معادله گرمای یک بعدی}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{معادله میله مرتعش}$$

$$u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0 \quad \text{معادله میله مرتعش}$$

از مفاهیم مقدماتی این مبحث مطالب زیر را ارائه می دهیم :

مرتبه : بالاترین مشتق موجود در معادله.

درجه : بزرگترین توان از بالاترین مشتق موجود.

مثال : در معادلات زیر مرتبه و درجه را مشخص می کنیم :

$$u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0 \quad \text{مرتبه چهار، درجه یک (الف)}$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{مرتبه دوم، درجه یک (ب)}$$

معادله خطی : معادله ای که u و مشتقات جزئی آن از درجه یک باشند. معادله ای که خطی نباشد، غیر خطی می گوییم.

معادله شبه خطی : معادله ای که تنها نسبت به بالاترین مرتبه موجود، خطی باشد.

مثال : در معادلات زیر مرتبه، درجه و خطی بودن یا نبودن را مشخص کنید.

مرتبه دوم، درجه یک، خطی $u_t = c^r u_{xx}$ (الف)

مرتبه دوم، درجه یک، غیرخطی، شبه خطی $uu_x + u_{xx} = x^r$ (ب)

جواب معادله : توابعی نظیر $u = u(x, y, \dots)$ که در معادله صدق می کنند.

معادله $u_x = u_y$ دارای جواب های زیراست :

$$u = x + y, \quad u = \cos(x + y), \quad u = e^{x+y}, \dots \Rightarrow u = F(x + y)$$

حل برخی از معادلات دیفراسیل جزئی ساده : دراین قسمت برخی از معادلات دیفرانسیل های جزئی را

به معادلات دیفرانسیل های معمولی تبدیل می کنیم و سپس آنها را حل می کنیم، به مثال های زیر توجه کنید :

مثال : معادله $u_{xx} = 0$ را حل کنید.

انتگرال بر حسب x $\rightarrow u_{xx} = 0$

$$\text{انتگرال بر حسب } x \rightarrow u = \int f(y) dx = xf(y) + g(x)$$

مثال : معادله $xu_{yx} + u_y = y^r$ را حل کنید.

حل : معادله را بصورت زیر مرتب می کنیم :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + u \right) = y^r$$

$$\text{انتگرال بر حسب } y \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + u \right) = y^r + f(x) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (ux) = y^r + f(x)$$

$$\text{انتگرال بر حسب } x \rightarrow ux = [xy^r + G(y)] + F(x) \Rightarrow u = y^r + \frac{1}{x} [F(x) + G(x)]$$

مثال : معادله $u_{xx} + u_{xy} + \delta u_{yy} = 0$ را حل کنید.

حل : فرض کنیم جواب به شکل $u = e^{mx+ny}$ باشد.

$$(m^r + \lambda mn + \delta n^r) e^{mx+ny} = 0, \quad e^{mx+ny} \neq 0, \quad m^r + \lambda mn + \delta n^r = 0$$

$$(m + \gamma n)(m + \delta n) = 0 \Rightarrow m = -\gamma n, \quad m = -\delta n$$

$$\Rightarrow u_{\eta} = e^{n(y-\zeta x)} \quad , \quad u_{\zeta} = e^{n(y-\zeta x)} \quad \Rightarrow \quad F(y-\zeta x), G(y-\delta x)$$

$$\Rightarrow u = F(y-\zeta x) + G(y-\delta x)$$

روش دالامبر : این روش برای حل تمام معادلات با مشتقات جزئی کاربرد ندارد، اما می توان با این روش و در برخی معادلات، محاسبت را کمتر و ساده تر کرد.

مثال : مطلوب است حل معادله (موج یک بعدی) $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$$a = x + ct \quad , \quad b = x - ct$$

$$\text{مشتق زنجیره ای} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial t}$$

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial t} \right)$$

$$= c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2}$$

به هین ترتیب :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x} \right)$$

$$= c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2}$$

$$\text{جایگذاری در معادله} \rightarrow c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} = 0 \quad \text{دوبار انتگرال بر حسب } b, a \rightarrow u = F(a) + G(b)$$

$$a = x + ct \quad , \quad b = x - ct \quad \Rightarrow \quad u = F(x+ct) + G(x-ct)$$

تذکر: در حالت های کلی، هر معادله با مشتقات جزئی را نمیتوان به روش دالامبر حل کرد.

بخش دوم : طبقه بندی معادلات خطی مرتبه دو و شکل متعارف آنها

معادلات خطی مرتبه دوم : یک معادله خطی مرتبه دوم به شکل کلی زیرمی باشد :

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

توابع A, B, C, D, E, G برحسب x, y می باشند.

تذکر : نحوه کنارهم قرارگرفتن حروف درشکل کلی معادله بالا، با همین ترتیب به ذهن بسپارید، چون درمطالب آتی قراست فرمول هایی ازاین شکل کلی ارائه شود.

اگر $G = 0$ باشد معادله را همگن.

و اگر $G \neq 0$ باشد معادله را ناهمگن می گوئیم.

طبقه بندی معادلات خطی مرتبه دو :

اگر :

(الف) $B^2 - 4AC > 0$ باشد معادله را هذلولی وارمی نامیم.

(ب) $B^2 - 4AC < 0$ باشد معادله را بیضی وار میخوانیم.

(پ) $B^2 - 4AC = 0$ باشد معادله را سهمی وار است.

اهمیت اینکه بدانیم هریک از معادلات خطی مرتبه دواز چه نوع است در این موضوع می باشد که برای هر قسمت یک راه حل خاص وجود دارد.

مثال : نوع معادلات زیررا مشخص کنید.

الف) $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$$A = C^2, \quad B = 0, \quad C = -1 \Rightarrow B^2 - 4AC = 4C^2 > 0 \Rightarrow \text{هذلولی وار}$$

ب) $u_t = c^2 u_{xx}$

$$A = C^2, \quad B = 0, \quad C = 0 \Rightarrow B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow \text{سهمی وار}$$

مثال : معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2e^{y-x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e^{2(y-x)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ، معادله از نوع سهمی و اراست :

$$A = 1, \quad B = 2e^{y-x}, \quad C = e^{2(y-x)}$$

$$B^2 - 4AC = 4e^{2(y-x)} - 4(1)(e^{2(y-x)}) = 0$$

شکل متعارف (کانونی) معادله :

شکل متعارف : شکل کلی معادله پس از اعمال تغییر مناسب در حل معادله موج به روش دالامبر، معادله ای که با اعمال تغییر متغیرها به دست آمد، شکل متعارف معادله بود.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a \cdot \partial b} = 0$$

معادلات مشخصه : براساس شکل کلی زیر، معادلات * را معادلات مشخصه می گوئیم.

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

$$* \begin{cases} \frac{dy}{dx} = B + \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \end{cases}$$

از حل معادلات مشخصه، جواب هایی به شکل زیر حاصل می شود :

$$f_1(x, y) = c_1, \quad f_2(x, y) = c_2$$

که با استفاده از آن، تغییر متغیر مناسب برای معادله، بصورت زیر خواهد بود :

$$a = f_1(x, y), \quad b = f_2(x, y)$$

مراحل حل معادله :

(۱) حل معادلات مشخصه و به دست آوردن b, a .

(۲) استفاده از قاعده زنجیره ای و بازنویسی معادله بر حسب b, a (نوشتن شکل متعارف).

(۳) انتگرال گیری بر حسب b, a و به دست آوردن u .

(این مراحل همان مراحل روش حل دالامبراست)

درنوشتن شکل متعارف، نکات زیر را مورد توجه قرار دهید :

الف) اگر معادله هذلولی وار باشد.

اولین شکل متعارف :

$$u_{ab} = F$$

F_1 تابعی از u, b, a و مشتقات آن بر حسب b, a .

با تغییر متغیرهای $x = a + b$ و $h = a - b$ دومین شکل متعارف :

$$u_{xx} - u_{hh} = F_2$$

F_2 تابعی از u, x, h و مشتقات آن بر حسب x, h می باشند.

مثال : مطلوب است حل معادله $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = x$.

$$A=1, B=3, C=2 \Rightarrow B^2 - 4AC = 1 > 0 \Rightarrow \text{هذلولی وار}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow a = y - 2x \\ \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow y = x \Rightarrow b = y - x \end{cases}$$

$$u_{ab} = b \rightarrow a \text{ انتگرال بر حسب } u_b = \int b da = ba + g(b)$$

$$b \text{ انتگرال بر حسب } b \rightarrow u = \int [ab + g(b)] db = \frac{ab^2}{2} + G(b) + F(a)$$

$$\Rightarrow u = \frac{(y-2x)(y-x)^2}{2} + F(y-2x) + G(y-x)$$

ب) اگر معادله سهمی وار باشد :

یکی از متغیرهای جدید، مثلاً a را از معادله مشخصه به دست آورده و دومی را به صورت $x = b$ یا $y = b$

در نظر میگیریم. بنابراین :

شکل متعارف :

$$u_{aa} = F_r$$

مثال : شکل متعارف معادله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2e^{y-x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e^{2(y-x)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ را بدست آورید.

$$B^r - \epsilon AC = 0 \Rightarrow \text{سه می وار}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{y-x}}{2} = e^{y-x} \Rightarrow e^{-y} dy = e^{-x} dx \Rightarrow -e^{-y} = -e^{-x} + c$$

$$\Rightarrow e^{-x} - e^{-y} = c, \quad a = e^{-x} - e^{-y}, \quad b = x$$

اگر قاعده مشتق زنجیره ای را به کاربریم شکل متعارف معادله به صورت زیر خواهد بود :

$$u_{aa} + 2e^{-2a} u_a = 0 \Rightarrow u_{aa} = -2e^{-2a} u_a$$

ج) اگر معادله بیضی وار باشد :

مانند حالت الف) عمل می کنیم. بعد از انتخاب a, b ، شکل متعارف به شکل زیر است :

$$u_{aa} + u_{bb} = F_r$$

a, b مختلط $\leftarrow$ تغییر متغیر مجدد به شکل زیر اعمال می کنیم :

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad h = \frac{a-b}{2i}$$

مثال : شکل متعارف معادله $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0$ را بنویسید.

$$B^r - \epsilon AC = -64 < 0 \Rightarrow \text{بیضی وار}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{2 \pm 8i}{2} = 1 \pm 4i$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \epsilon i \quad \Rightarrow \quad y = (1 + \epsilon i)x \quad \Rightarrow \quad a = y - (1 + \epsilon i)x$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \epsilon i \quad \Rightarrow \quad y = (1 - \epsilon i)x \quad \Rightarrow \quad b = y - (1 - \epsilon i)x$$

$$x = \frac{a + b}{2} = y - x, \quad h = \frac{a - b}{2i} = \epsilon x$$

حال اگر قاعده مشتق زنجیره ای را با این متغیرهای جدید به کار ببریم، خواهیم داشت :

$$u_{xx} + u_{hh} = \bullet$$

بخش سوم : حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به روش جداسازی متغیرها
حل معادله به روش جداسازی :

مراحل حل :

(۱) نوشتن جواب به صورت $u = XY$ یا $u = XYZ$ (برحسب اینکه معادله، دو یا سه متغیر دارد)

(۲) جایگذاری جواب فوق در معادله و تبدیل آن به یک دستگاه معادلات معمولی و حل این دستگاه.

مثال) معادله $u_x - u_y = 0$ را با شرط $u(x, 0) = e^{2x}$ حل کنید.

$$u = XY \Rightarrow u_x = X' Y, \quad u_y = XY'$$

$$\Rightarrow X' Y = XY' \Rightarrow \frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = l \quad (l \text{ عددی ثابت است})$$

$$\Rightarrow \frac{X'}{X} = l \Rightarrow \ln X = lx + c_1 \Rightarrow X = Ae^{lx}$$

$$\Rightarrow \frac{Y'}{Y} = l \Rightarrow \ln Y = ly + c_2 \Rightarrow Y = Be^{ly}$$

$$\Rightarrow u = XY = (AB)e^{l(x+y)} = ce^{l(x+y)}$$

$$u(x, 0) = e^{2x} \Rightarrow ce^{lx} = e^{2x}$$

$$\Rightarrow c = 1, \quad l = 2 \Rightarrow u(x, y) = e^{2(x+y)}$$

حل معادله موج یک بعدی : شکل کلی یک معادله موج یک بعدی به صورت زیر است :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

در شرایط مرزی، یعنی در نقاط ابتدا و انتها (l طول است) به صورت زیر است :

$$u(\cdot, t) = u(l, t) = 0$$

($u(\cdot, t)$ انحراف سیم در زمان t و نقطه 0 و $u(l, t)$ انحراف سیم در انتها)

و شرایط اولیه را می نویسیم :

$$\begin{cases} u_t'(x, \cdot) = g(x) \\ u(x, \cdot) = f(x) \end{cases}$$

(روابط صفحه قبل را با یک مثال ملموس ارائه می کنیم)

مثال : فرض کنید یک سیم سنتور به طول l داده شده، این سیم را بطوری از ابتدا و انتها محکم به جایی می بندیم که به اصطلاح اصلاً شکم ندهد (یا در فیزیک اینگونه شرح می دهند : نیروی کشش نخ آنقدر زیاد است که نیروی جاذبه برای آن بسیار ناچیز است).

نقطه ابتدای این سیم صفر و نقطه انتها را l در نظر می گیریم، این سیم همگن است (جرم به صورت یکنواخت توزیع شده است.) این سیم با کوچکترین حرکتی دچار ارتعاش می شود.

حال اگر این سیم را مرتعش کنیم با توجه به خاصیت میرایی بعد از لحظاتی از ارتعاش می افتد. هدف روابط صفحه قبل این است که پس از شروع ارتعاش بتوانیم مکان تک تک نقاط این سیم را در لحظه t پیدا کنیم. روابط شرایط مرز در صفحه قبل این را می گوید که نقطه ابتدا و انتها در هر زمانی مرتعش نمی شوند (البته اگر نیرو قائم باشد).

مثال : معادله زیر را با شرایط داده شده حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < p, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad 0 \leq x \leq p$$

$$u_t(x, 0) = k, \quad 0 \leq x \leq p$$

$$u(0, t) = u(p, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq p$$

حل : فرض می کنیم u ضرب دوتابع باشد : (یکی بر حسب x و دیگری بر حسب t).

$$u = XT \Rightarrow u_t = XT', \quad u_{tt} = XT''$$

$$u_x = XT', \quad u_{xx} = XT''$$

$$XT'' = XT' \Rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -l^2$$

$$\frac{X''}{X} = -l^2 \Rightarrow X'' + l^2 X = 0 \quad \text{معادله مشخصه} \rightarrow m^2 + l^2 = 0 \Rightarrow m = \pm li$$

از اطلاعات معادلات دیفرانسیل استفاده می کنیم و جواب بدست می آید :

$$X = A_1 \cos lx + A_2 \sin lx$$

به همین ترتیب :

$$T = B_1 \cos lt + B_2 \sin lt$$

$$\Rightarrow u = XT = (A_1 \cos lx + A_2 \sin lx)(B_1 \cos lt + B_2 \sin lt)$$

$$u(\cdot, t) = 0 \Rightarrow A_1(B_1 \cos lt + B_2 \sin lt) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\Rightarrow u = (A \cos lt + B \sin lt) \sin lx, \quad A = A_2 B_1, \quad B = A_2 B_2$$

$$u(p, t) = 0 \Rightarrow (A \cos lt + B \sin lt) \sin lp = 0 \Rightarrow l = n$$

$$\Rightarrow u = (A \cos nt + B \sin nt) \sin nx$$

$$\text{اصل برهم نهی} \Rightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} n (B_n \cos nt - A_n \sin nt) \sin nx$$

$$u_t(x, \cdot) = k \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin nx = k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin nx = k$$

حال فرض می کنیم $nB_n = b_n$ ، از مقایسه با سری فوریه سینوسی تابع ثابت k داریم :

$$\Rightarrow k = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \Rightarrow b_n = \frac{2}{p} \int_0^p k \sin nx dx = \frac{2}{np} (1 - \cos np)$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{np} (1 - \cos np)$$

$$\Rightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n \cos nt + \frac{2}{np} (1 - \cos np) \sin nt) \right] \sin nx$$

$$u(x, \cdot) = x \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx$$

با در نظر گرفتن سری فوریه سینوسی تابع $f(x) = x$ داریم :

$$u(x, \cdot) = x \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\gamma}{n} \cos np \sin np \Rightarrow A_n = -\frac{\gamma}{n} \cos np$$

$$\Rightarrow u = \frac{\gamma}{p} \sum_{n=1}^{\infty} [(1 - \cos np) \sin nt - np \cos nt] \frac{\sin nx}{n^{\gamma}}$$

معادلات انتشار گرما : شکل کای بصورت زیر است :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^{\gamma} \nabla^{\gamma} u$$

$u \leftarrow$ دما در وضعیت (x, y, z) درون یک جسم در زمان t

$c^{\gamma} \leftarrow$ ثابت فیزیکی (ثابت نفوذ)

در حالت یک بعدی (سیم یا میله همگن) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^{\gamma} \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial x^{\gamma}}$$

دمای دوانتهای میله، صفر $\rightarrow u(\cdot, t) = u(l, t) = 0$

دمای اولیه $\rightarrow u(x, \cdot) = f(x)$

در این صورت، حل معادله زیرمورد نظر خواهد بود :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^{\gamma} \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial x^{\gamma}}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$u(\cdot, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, \cdot) = f(x), \quad 0 \leq x \leq p$$

مثال : مطلوب است حل معادله زیر :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^{\gamma} \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial x^{\gamma}}, \quad 0 \leq x \leq p, \quad t > 0$$

$$u(\cdot, t) = u(p, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, \cdot) = \sin x, \quad 0 < x < p$$

$$u = XT \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{C^2 T} = -\lambda^2$$

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x$$

$$\frac{T'}{C^2 T} = -\lambda^2 \Rightarrow T = C e^{-c^2 \lambda^2 t}$$

$$\Rightarrow u = XT = (A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x) C e^{-c^2 \lambda^2 t}$$

$$u(\cdot, t) = 0 \Rightarrow A_1 C e^{-c^2 \lambda^2 t} = 0 \quad \underline{C e^{-c^2 \lambda^2 t} \neq 0} \quad A_1 = 0$$

$$\Rightarrow u = (A_2 \sin \lambda x) C e^{-c^2 \lambda^2 t}$$

$$u(x, 0) = \sin x \Rightarrow C A_2 \sin \lambda x = \sin x \Rightarrow C A_2 = 1, \lambda = 1 \Rightarrow u = e^{-c^2 t} \sin x$$

مساله انتشار گرما برای یک میله با طول نامتناهی :

شکل کلی :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

$$\leftarrow u(x, 0) = f(x) \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

درجه حرارت اولیه در میله

با در نظر گرفتن جوابی به شکل $u(x, t) = F(x)G(t)$ بررسی مسئله و جایگذاری آن در معادله، نهایتاً خواهیم دید که مسئله دارای جوابی به صورت زیر است :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (a(a) \cos a x + b(a) \sin a x) e^{-c^2 a^2 t} da$$

$$a(a) = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos a x dx$$

$$b(a) = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin a x dx$$

مثال : درجه حرارت در یک میله نامتناهی را بیابید، در صورتی که :

$$u(x, \cdot) = \begin{cases} x & , \quad |x| \leq 1 \\ \cdot & , \quad |x| > 1 \end{cases}$$

داریم: $a(a) = 0$

$$b(a) = \frac{1}{p} \int_{-1}^1 x \sin ax \, dx = \frac{1}{p} \left[-\frac{x}{a} \cos ax + \frac{1}{a^2} \sin ax \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{pa} \left(\frac{\sin a}{a} - \cos a \right)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \left(\frac{\sin a}{a} - \cos a \right) \sin ax e^{-c^2 a^2 t} da$$

معادله لاپلاس:

مثال: معادله زیر را با شرایط داده شده حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < y < 1$$

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u(x, 1) = k, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u = XY \Rightarrow u_x = X'Y, \quad u_{xx} = X''Y$$

$$u_y = XY', \quad u_{yy} = XY''$$

$$u_y = XY', \quad u_{yy} = XY''$$

$$\Rightarrow X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$$

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x$$

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0 \Rightarrow Y = B_1 \cosh \lambda y + B_2 \sinh \lambda y$$

$$\Rightarrow u = XY = (A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x)(B_1 \cosh \lambda y + B_2 \sinh \lambda y)$$

حال اگر سه شرط اول را همراه با اصل برهم نهی مورد استفاده قرار دهیم خواهیم داشت:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin np x \sinh np y$$

$$u(x, 1) = k \Rightarrow k = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sinh np)(\sin np x)$$

حال با استفاده از سری فوریه سینوسی تابع ثابت k و مقایسه طرفین داریم :

$$b_n \frac{2k}{\sinh np} \int_0^1 \sin np x dx = \frac{2k(1 - \cos np)}{np \sinh np}$$

$$\Rightarrow u = \frac{2k}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos np}{n \sinh np} \right) \sin np x \sinh np y$$